Doprinos dilatonskog polja osobinama Dp-brane

B. Nikolić i B. Sazdović
Institut za fiziku Beograd

Fundamentalne interakcije - Srbija 2007

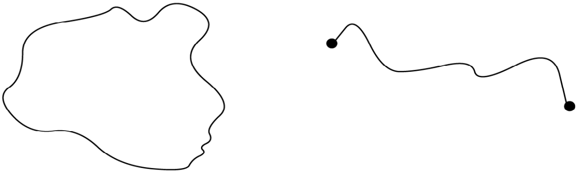
Septembar 26 - 28, 2007
Irški venac, Novi Sad, Srbija

Plan izlaganja

- Osnovno o strunama
- Dp-brane i granični uslovi
- Dejstvo i kvantna konformna simetrija
- Rezultati za različit izbor pozadinskih polja
- Zaključak

Osnovno o strunama

- **Struna** je objekat sa jednom prostornom dimenzijom.
- Tačka pri kretanju opisuje liniju, a struna dvodimenzionu površ, **svetsku površ**.
- Svetska površ je parametrizovana jednim vremenskim τ i jednim prostornim parametrom σ, $\sigma \in [0\,,\pi]$.
- Struna se javlja u dve topologije: zatvorena struna, koja nema krajeve, i otvorena struna, gde je potrebno uračunati doprinos **graničnih uslova**.



Slika: Zatvorena i otvorena struna

Granični uslovi

- Varijacioni princip

$$\delta S = \text{Euler-Lagrange} + \int d\tau (\gamma_\mu^{(0)} \delta x^\mu + \gamma^{(0)} \delta F)|_0^\pi = 0 \,,$$

gde su x^μ prostorno-vremenske koordinate D-dimenzionog prostor-vremena, F konformni faktor metrike svetske površi i

$$\gamma_\mu^{(0)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x^\mu)} \,, \quad \gamma^{(0)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma F)} \,. \tag{1}$$

- Zatvorena struna nema krajeve tako da su za nju granični uslovi automatski zadovoljeni.
- U slučaju otvorene strune postoje principijelno dva izbora graničnih uslova. Ukoliko su varijacije promenljivih na krajevima strune proizvoljne a faktori uz varijacije promenljivih nula, $\gamma_\mu^{(0)}|_0^\pi = 0$ i $\gamma^{(0)}|_0^\pi = 0$, to su Nojmanovi granični uslovi. Ako su varijacije promenljivih na krajevima strune jednake nuli, $\delta x^\mu|_0^\pi = 0$ i $\delta F|_0^\pi = 0$, imamo Dirihleove granične uslove.

Dp-brane

- Dp-brane su objekti sa p-prostornih dimenzija koji zadovojavaju Dirihleove granične uslove. Dimenzija Dp-brane je $p+1$.
- Ako za $p+1$ koordinata $x^i\,,(i=0,1,2,\ldots,p)$ izaberemo Nojmanove granične uslove, a za ostatak koordinata $x^a\,,(a=p+1,\ldots\,,D)$ Dirihleove uz uslov $G_{\mu\nu}=0\,,(\mu=i\,,\nu=a)$, dobijamo Dp-branu po kojoj se kreću krajevi strune.
- Za polje F biramo Nojmanove granične uslove i tretiramo ga kao varijablu.

Dejstvo

- Razmatramo strunu u prisustvu metrike $G_{\mu\nu}$, antisimetričnog tenzora $B_{\mu\nu}$ i dilatonskog polja $\Phi(x)$

$$S = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-g} \left\{ \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} B_{\mu\nu} \right] \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + \Phi R^{(2)} \right\} , \tag{2}$$

  gde sa $\xi^\alpha = (\tau \, , \sigma)$ parametrizujemo svetsku površ Σ čija je metrika $g_{\alpha\beta}$. Skalarna krivina u odnosu na metriku $g_{\alpha\beta}$ je označena sa $R^{(2)}$.
- Zašto dilatonsko polje? Pri kvantovanju dejstva koje opisuje strunu u prisustvu $G_{\mu\nu}$ i $B_{\mu\nu}$ ispostavlja se da je konformna simetrija narušena na kvantnom nivou (anomalija). Da bi se ukinula anomalija uvodi se dodatni član sa dilatonom.
- Pozadinska polja više nisu proizvoljna!

Kvantna konformna invarijantnost

$$\beta^G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_\nu{}^{\rho\sigma} + 2 D_\mu a_\nu = 0 \,, \tag{3}$$

$$\beta^B_{\mu\nu} \equiv D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} - 2 a_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{4}$$

$$\beta^\Phi \equiv 2\pi\kappa \frac{D-26}{6} - R - \frac{1}{24} B_{\mu\rho\sigma} B^{\mu\rho\sigma} - D_\mu a^\mu + 4a^2 = 0 \,, \tag{5}$$

gde su $R_{\mu\nu}$, D_μ i R Riči tenzor, kovarijantni izvod i skalarna krivina u odnosu na $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\rho\sigma} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ je jačina polja za polje $B_{\mu\nu}$, a vektor $a_\mu = \partial_\mu \Phi$ je gradijent dilatonskog polja.

- Posmatramo jedno partikularno rešenje ovih jednačina

$$G_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu} = const \,, B_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu} = const \,, \tag{6}$$

$$\Phi(x) = \Phi_0 + a_\mu x^\mu \,, (a_\mu = const) \,. \tag{7}$$

Konačna forma dejstva

- Oscilacije u x^a pravcima se dekupluju. Koristeći konformni kalibracioni uslov, $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$, dobijamo

$$S = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \left[\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} G_{ij} + \epsilon^{\alpha\beta} B_{ij} \right) \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j + 2\eta^{\alpha\beta} a_i \partial_\alpha x^i \partial_\beta F \right]. \tag{8}$$

- Na klasičnom nivou ovo dejstvo nije konformno invarijantno jer eksplicitno zavisi od F.
- Na kvantnom nivou imamo konformnu invarijantnost za zatvorenu strunu, dok je u slučaju otvorene strune potrebno ispitati i granične uslove.

Granični uslovi kao kanonske veze

- Granične uslove $\gamma_i^{(0)}|_0^\pi = 0$ i $\gamma^{(0)}|_0^\pi = 0$ tretiramo kao kanonske veze.
- Iz uslova konzistentnosti veza dobija se beskonačan skup veza

$$\gamma_i^{(n)} \equiv \left\{ H_c \, , \gamma_i^{(n-1)} \right\} \approx 0 \, , \quad \gamma^{(n)} \equiv \left\{ H_c \, , \gamma^{(n-1)} \right\} \approx 0 \, , (n \geq 1) \tag{9}$$

gde je H_c kanonski hamiltonijan.

- Uz pomoć Tejlorovog razvoja beskonačan skup veza je moguće prepisati u pogodnijem obliku

$$\Gamma_i(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} \gamma_i^{(n)}(\sigma = 0) \, , \quad \Gamma(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} \gamma^{(n)}(\sigma = 0) \, . \tag{10}$$

- Slično važi i na drugom kraju strune u $\sigma = \pi$. Kombinacijom veza u $\sigma = 0$ i $\sigma = \pi$ se dobija da su kanonske varijable 2π periodične, pa je dovoljno posmatrati samo veze u $\sigma = 0$.

Slučaj bez dilatonskog polja

- Koristeći dejstvo (8), uz uslov $a_i = 0$, i rešavajući jednačinu $\Gamma_i = 0$, dobijamo

$$x^i(\sigma) = q^i(\sigma) - 2\Theta^{ij} \int_0^\sigma d\sigma_1 p_i(\sigma_1)\,, \quad \pi_i = p_i\,, \tag{11}$$

gde su $q^i = \frac{1}{2}[x^i(\sigma) + x^i(-\sigma)]$, $p_i = \frac{1}{2}[\pi_i(\sigma) + \pi_i(-\sigma)]$, i

$$\Theta^{ij} = -\frac{1}{\kappa}(G_{eff}^{-1} B G^{-1})^{ij}\,, \quad G_{ij}^{eff} = G_{ij} - 4(BG^{-1}B)_{ij}\,. \tag{12}$$

Slučaj bez dilatonskog polja - nekomutativnost

- Uvodeći varijable centra mase, $x^i(\sigma) = x^i_{cm} + X^i(\sigma)$, Poasonova zagrada koordinata poprima oblik

$$\left\{X^i(\sigma)\,, X^j(\overline{\sigma})\right\} = \Theta^{ij}\Delta(\sigma + \overline{\sigma})\,, \tag{13}$$

gde je

$$\Delta(\sigma+\overline{\sigma}) = \begin{cases} -1 & \text{if } \sigma = 0 = \overline{\sigma} \\ 0 & \text{if } 0 < \sigma\,, \overline{\sigma} < \pi\,. \\ 1 & \text{if } \sigma = \pi = \overline{\sigma} \end{cases} \tag{14}$$

- Prisustvo impulsa u rešenju za X^i čini krajeve strune nekomutativnim.
- Pošto se krajevi strune kreću po Dp-brani, Dp-brana postaje jedna nekomutativna mnogostrukost.

Uvodjenje dilatonskog polja

- Razmatramo tri slučaja: (1) $\tilde{a}^2 \neq 0$, $a^2 \neq 0$, (2) $a^2 = 0$, $\tilde{a}^2 \neq 0$, i (3) $\tilde{a}^2 = 0$, $a^2 \neq 0$ ($\tilde{a}^2 \equiv (G_{eff}^{-1})^{ij} a_i a_j = \tilde{a}^i a_i$).
- Oblik rešenja je u sva tri slučaja isti

$$x^i_{D_p}(\sigma) = Q^i(\sigma) - 2\Theta^{ij} \int_0^\sigma d\sigma_1 P_j(\sigma_1) \,, \quad \pi_i^{Dp} = P_i \,, \tag{15}$$

gde su $x^i_{D_p} \equiv (P_{Dp})^i{}_j x^j$, $\pi_i^{Dp} \equiv (P_{Dp})_i{}^j \pi_j$, $Q^i = (P_{D_p})^i{}_j q^j$, i $P_i = (P_{D_p})_i{}^j p_j$.

- U prvom slučaju projektor je jedinica, a u slučajevima (2) i (3)

$$(P_{Dp})_i{}^j = \delta_i{}^j - \frac{4}{\tilde{a}^2 - a^2} (Ba)_i (\tilde{a}B)^j \,, \tag{16}$$

koji projektuje na potprostor ortogonalan na pravac vektora $(\tilde{a}B)^i$.

- Forma tenzora Θ^{ij} zavisi od slučaja koji razmatramo.

Doprinos dilatonskog polja nekomutativnosti

- Oblik Poasonove zagrade koordinata je isti u sva tri slučaja

$$\Big\{X^i_{Dp}(\sigma)\,,X^j_{Dp}(\overline{\sigma})\Big\} = \Theta^{ij}\Delta(\sigma+\overline{\sigma})\,. \tag{17}$$

- Iz relacije koja važi u sva tri slučaja, $a_i\Theta^{ij}=0$, sledi da je koordinata $x_c = a_i x^i$ komutativna.
- U slučaju (1) F je nova nekomutativna varijabla, dok u slučajevima (2) i (3) F i koordinata $x_1 \equiv (aB)_i x^i$ zadovoljavaju Dirihleove granične uslove i smanjuju dimenziju Dp-brane za 2.