

Supersimetrije trodimenzione crne rupe sa torzijom

Branislav Cvetković i Milutin Blagojević



Institut za fiziku, Beograd 2007

Plan izlaganja

- Uvod
- Supersimetrična 3D gravitacija sa torzijom
- Asimptotske simetrije i stabilnost crne rupe
- Zaključak

Uvod

- Tokom poslednjih 25 godina postignuti su značajni rezultati u razumevanju fundamentalnih interakcija: Vajnberg-Salamov model je uspešno ujedinio elektromagnetizam i slabe interakcije dok je kvantna hromodinamika precizno opisala jake interakcije;
- Opšta teorija relativnosti (OTR) je ostala izvan ovog okvira. Prvi pokušaji da se „pomire” OTR i kvantna teorija javili su se već oko 1930, ali još uvek nije formulisana potpuna, konzistentna kvantna teorija gravitacije.
- S jedne strane se ispostavlja da kvantna teorija gravitacije nije renormalizabilna, kvantizacija prostora i vremena dovodi do brojnih nerešenih problema: nelokalnost, kauzalnost, vremenska evolucija...

- Zbog toga se razmatraju tehnički jednostavniji modeli, koji imaju ista konceptualna svojstva kao i OTR.
- Jedan od modela tog tipa je trodimenziona (3D) gravitacija koja je u poslednjih četvrt veka bila aktivna istraživačka oblast.
- U okviru tradicionalnog pristupa zasnovanog na OTR, *Rimanovoj geometriji*, postignuti su mnogobrojni značajni rezultati.
- 3D gravitacija takodje predstavlja arenu za testiranje novih ideja u okviru opštijeg koncepta gravitacije zasnovanog na *Riman-Kartanovoj geometriji* u kome se i *torzija* i *krivina* koriste da bi se opisala gravitaciona dinamika.

- Od 1991. kada su Milke i Bekler predložili topološko dejstvo za 3D gravitaciju sa torzijom potvrđeno je da je ovaj model poseduje bogatu dinamičku strukturu:
 - 3D gravitacija sa torzijom ima rešenje za crnu rupu koje ima zanimljive termodinamičke osobine;
 - uz pogodno odabrane granične uslove teorija poseduje asimptotsku konformnu simetriju, realizovanu sa dve nezavisne Virazoro algebre sa različitim vrednostima centralnih naboja;
 - postoji supersimetrična formulacija teorije i pogodno proširenje AdS asimptotskih uslova na fermionski sektor dovodi do pojave superkonformne simetrije na granici.

Supersimetrična 3D gravitacija sa torzijom

- Teorija gravitacije sa torzijom se prirodno formuliše kao Poenkareova gradijentna teorija (PGT).
- Osnovne dinamičke varijable u PGT su trijade b^i i Lorencova koneksija $A^{ij} = -A^{ji} =: -\varepsilon^{ij}_k \omega^k$ (1-forme). Tenzori jačine polja su torzija i krivina:

$$T^i = db^i + \varepsilon^i_{jk} \omega^j \wedge b^k, \quad R^i = d\omega^i + \frac{1}{2} \varepsilon^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k. \quad (1)$$

- Metrička struktura PGT definisana je sa $g = \eta_{ij} b^i \otimes b^j$. Metrika i koneksija su medjusobno povezane uslovom metričnosti $\nabla g = 0$
- Riman-Kartanov prostor predstavlja geometrijsku strukturu PGT.

Milke-Beklerovo dejstvo

- *Topološki* Milke-Beklerov (MB) model za 3D gravitaciju je:

$$I_0 = 2a \int b^i R_i - \frac{\Lambda}{3} \int \varepsilon_{ijk} b^i b^j b^k + \alpha_3 I_{CS}[\omega] + \alpha_4 \int b^i T_i, \quad (2)$$

gde je $a = 1/16\pi G$ i $I_{CS}[\omega] = \int (\omega^i d\omega_i + \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k)$.

- Na jednačinama kretanja važi sledeća relacija za Rimanov deo krivine

$$\tilde{R}^{ij} = -\Lambda_{\text{eff}} b^i \wedge b^j \quad \Lambda_{\text{eff}} := q - \frac{1}{4} p^2, \quad (3)$$

gde je Λ_{eff} efektivna kosmološka konstanta i

$$p = \frac{\alpha_3 \Lambda + \alpha_4 a}{\alpha_3 \alpha_4 - a^2}, \quad q = -\frac{(\alpha_4)^2 + a \Lambda}{\alpha_3 \alpha_4 - a^2}.$$

Crna rupa sa torzijom

- Za $\Lambda_{\text{eff}} < 0$, MB model poseduje egzaktno vakuumsko rešenje crnu rupu sa torzijom koja uopštenje BTZ crne rupe.
- Rešenje zavisi od dva parametra m i J , i njegova energija i moment impulsa su:

$$E = m + \frac{\alpha_3}{a} \left(\frac{pm}{2} - \frac{J}{\ell^2} \right), \quad M = J + \frac{\alpha_3}{a} \left(\frac{pJ}{2} - m \right). \quad (4)$$

- Topologija mnogostrukosti crne rupe je $R^2 \times S^1$.
- Lokalno izometrično ali globalno različito AdS rešenje (AdS_3), čija topologija je R^3 , može formalno da se dobije iz rešenja za crnu rupu zamenom $J = 0, 8Gm = -1$.

Supersimetrična ekstenzija

- Supersimetrična ekstenzija 3D gravitacije sa torzijom je:

$$I = I_0 - g \int (\bar{\psi} \nabla \psi - i \mu \bar{\psi} b^i \gamma_i \psi) - g' \int (\bar{\psi}' \nabla \psi' - i \mu' \bar{\psi}' b^i \gamma_i \psi') . \quad (5)$$

- Dejstvo je invarijantno na lokalne supersimetrične transformacije pri čemu konstante g, g' i $\mu^\Pi = (\mu, \mu')$ zadovoljavaju relacije

$$2ag = a - 2\mu' \alpha_3, \quad 2ag' = a - 2\mu \alpha_3, \quad 2\mu + \frac{p}{2} = \frac{1}{\ell}, \quad 2\mu' + \frac{p}{2} = -\frac{1}{\ell}.$$

Komutatorska algebra lokalnih super-Poenkareovih transformacija zatvara se na jednačinama kretanja.

- Crna rupa i AdS_3 mogu da se posmatraju kao *egzaktna rešenja supersimetričnih jednačina kretanja*, pri čemu je $\psi = \psi' = 0$.

Asimptotske simetrije i stabilnost crne rupe

- Asimptotska simetrija je opisana sa četiri kiralna parametra: dva bozonska $T^\mp(x^\mp)$ i dva fermionska $\epsilon^\mp(x^\mp)$.
- Asimptotska algebra Puasonovih zagrada Furijeovih modova kanonskih generatora $\tilde{G}(T^\mp, \epsilon^\mp)$ je

$$\begin{aligned} [L_n^\mp, L_m^\mp] &= (n - m)L_{n+m}^\mp + \frac{c^\mp}{12} n^3 \delta_{m+n,0}, \\ [L_n^\mp, Q_m^\mp] &= \left(\frac{1}{2}n - m \right) Q_{m+n}^\mp, \\ \{Q_n^\mp, Q_m^\mp\} &= 2L_{n+m}^\mp + \frac{c^\mp}{3} n^2 \delta_{m+n,0}, \end{aligned}$$

gde su c^\mp centralni naboji: $c^- = 12 \cdot 2\pi\ell a g$, $c^+ = 12 \cdot 2\pi\ell a g'$.

- U sektorima sa periodičnim (Ramonovim) ili anti-periodičnim (Nevo-Švarcovim) graničnim uslovima za fermionska polja indeks operatora Q_m^\mp uzima celobrojne ili polucelobrojne vrednosti, respektivno.
- Uslovi realnosti koji modovi zadovoljavaju su $(L^\mp)_n^\dagger = L_{-n}^\mp$, $(Q^\mp)_n^\dagger = Q_{-n}^\mp$.
- Svojsvene vrednosti bozonskih operatora L_0^\mp mogu da se izraze u funkciji energije i momenta impulsa sistema. Za crnu rupu/AdS₃ važi:

$$L_0^\mp = \frac{\ell E \pm M}{2} = (\ell m \pm J) \frac{c^\mp}{48\pi a \ell}. \quad (6)$$

Kilingovi spinori i stabilnost crne rupe/AdS₃

- Može se pokazati da *opšta crna rupa* nema Kilingove spinore, *ekstremalna crna rupa* sa $\ell E = |M|$ poseduje samo jedan, dok crna rupa sa $E = 0$ ima dva Kilingova spinora.

- U *Ramonovom sektoru* podalgebra za koju je centralni član jednak nuli je generisana sa (L_0^\mp, Q_0^\mp) , pa je

$$L_0^\mp = Q_0^\mp Q_0^\mp = Q_0^\mp (Q_0^\mp)^\dagger \geq 0. \quad (7)$$

- Za crnu rupu nulte energije u relacijama (7) važi jednakost, što znači da crna rupa nulte energije predstavlja *osnovno stanje Ramonovog sektora*. Za ekstremalnu crnu rupu važi samo jedan znak jednakosti u (7) dok je za opštu crnu rupu $L_0^- > 0$ i $L_0^+ > 0$.

- AdS₃ pripada sektoru sa antiperiodičnim graničnim uslovima za fermione, pri čemu je $L_0^{\mp} = -c^{\mp}/24$. Ukoliko se uvede smena $L_0^{\pm} \rightarrow L_0^{\pm} - c^{\pm}/24$, podalgebra za koju je centralni član jednak nuli je $osp(1|2) \oplus osp(1|2)$ generisana sa $(L_{\mp 1}, L_0, Q_{\mp 1/2})^{\mp}$, odakle sledi

$$2L_0^{\mp} = Q_{1/2}^{\mp} Q_{-1/2}^{\mp} + Q_{-1/2}^{\mp} Q_{1/2}^{\mp} = Q_{1/2}^{\mp} (Q_{1/2}^{\mp})^{\dagger} + Q_{-1/2}^{\mp} (Q_{-1/2}^{\mp})^{\dagger} \geq 0. \quad (8)$$

- AdS₃ ima četiri Kilingova spinora koji su parametri egzaktnih supersimetrija generisanih sa $(Q_{1/2}^{\mp}, Q_{-1/2}^{\mp})$.
- Za AdS₃ važe znaci jednakosti u (8), pa se AdS₃ može *intrepretirati kao osnovno stanje Nevo-Švarcovog sektora.*

Zaključak

- Asimptotska simetrija $N = 1 + 1$ supersimetrične 3D gravitacije sa torzijom je opisana sa dve nezavisne super-Virazoro algebre sa različitim vrednostima centralnih naboja.
- Crna rupa nulte energije i AdS_3 se mogu prirodno interpretirati kao osnovna stanja sektora sa periodičnim i antiperiodičnim graničnim uslovima, respektivno.