Otvorena struna i nekomutativna elektrodinamika

B. Sazdović i D. S. Popović
Institut za Fiziku, Beograd, Srbija

- Simetrije prostorno vremenskih jednačina kretanja
  - za zatvorenu strunu
  - za otvorenu strunu
    - ∗ da bi se održala ista simetrija uvodi se vektorsko polje, A_μ, na krajevima otvorene strune
    - ∗ kalibraciona simetrija polja A_μ

- Nekomutativna elektrodinamika
  - U prisustvu antisimetričnog polja $B_{\mu\nu}$
    - ∗ Svetska zapremina Dp-brane postaje nekomutativana mnogostrukost
    - ∗ Polje A_μ se transformiše kao vektorsko polje u nekomutativnoj elektrodinamici

Dejstvo

- Dejstvo

$$S = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} B_{\mu\nu} \right] \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu$$

  - $\xi^\alpha \, (\alpha = 0, 1)$ koordinate svetske površi
  - $x^\mu(\xi) \, (\mu = 0, 1, ..., D-1)$ prostorno vremenske koordinate
  - $x^i(\xi) \, (i = 0, 1, ..., p)$ koordinate Dp-brane
  - Struna propagira u prostoru sa pozadinskim poljima
    * metrički tenzor $G_{\mu\nu}(x)$
    * antisimetrični tenzor $B_{\mu\nu}(x) = -B_{\nu\mu}(x)$

- Kanonski Hamiltonjian i tenzor energije impulsa

$$\mathcal{H}_c = h^- T_- + h^+ T_+ \,, \qquad T_\pm = \mp \frac{1}{4\kappa} G^{\mu\nu} j_{\pm\mu} j_{\pm\nu}$$

- Struje preko promenljivih x^μ i njihovih kanonski konjugovanih impulsa π_μ

$$j_{\pm\mu} = \pi_\mu + 2\kappa \Pi_{\pm\mu\nu} x^{\nu\prime} \,, \qquad \Pi_{\pm\mu\nu} \equiv B_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}$$

- Dve nezavisne kopije Virasoro algebre

$$\{T_\pm(\sigma), T_\pm(\bar\sigma)\} = -[T_\pm(\sigma) + T_\pm(\bar\sigma)] \delta'(\sigma - \bar\sigma)$$

Simetrije prostorno vremenskih jednačina kretanja

- Metrički tenzor svetske površi $g_{\alpha\beta}$, izražen preko promenljivih svetlosnog konusa (h^+, h^-, F)

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{2F} \begin{pmatrix} -2h^-h^+ & h^- + h^+ \\ h^- + h^+ & -2 \end{pmatrix}$$

- – Difeomorfizam svetske površi $\xi^\mu \longrightarrow \xi^\mu + \varepsilon^\mu(\xi)$

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\partial_\rho \varepsilon^\nu + g^{\nu\rho}\partial_\rho \varepsilon^\mu - \varepsilon^\rho \partial_\rho g^{\mu\nu}$$

  – Prelaz na promenljivih svetlosnog konusa sa novim parametrima $\varepsilon^\pm = \varepsilon^1 - \varepsilon^0 h^\pm$

$$\delta h^\pm = \partial_0 \varepsilon^\pm + h^\pm \partial_1 \varepsilon^\pm - \varepsilon^\pm \partial_1 h^\pm$$

$$\delta F = -\partial_1(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) + (\varepsilon^- - \varepsilon^+)\frac{\partial_1(h^- + h^+)}{h^- - h^+}$$
$$-\frac{\varepsilon^+}{h^- - h^+}(\partial_0 F + h^- \partial_1 F) + \frac{\varepsilon^-}{h^- - h^+}(\partial_0 F + h^+ \partial_1 F)$$

  – Zatvaranje algebre

$$[\delta(\varepsilon_1), \delta(\varepsilon_2)]h^\pm = \delta(\varepsilon_3)h^\pm \quad [\delta(\varepsilon_1), \delta(\varepsilon_2)]F = \delta(\varepsilon_3)F$$

  – Strukturne funkcije

$$\varepsilon_3^\pm = \varepsilon_1^\pm \partial_1 \varepsilon_2^\pm - \varepsilon_2^\pm \partial_1 \varepsilon_1^\pm$$

Klasična algebra

- Generatori

$$\varepsilon^{\pm} \to T_{\pm} \qquad \varepsilon \odot T \equiv \int d\sigma [\varepsilon^{+}(\sigma) T_{+}(\sigma) + \varepsilon^{-}(\sigma) T_{-}(\sigma)]$$

Algebra

$$\{\varepsilon_1 \odot T, \varepsilon_2 \odot T\} = \varepsilon_3 \odot T$$

- – Za dati izbor strukturnih funkcija, sledi

$$\{T_{\pm}(\sigma), T_{\pm}(\bar{\sigma})\} = [T_{\pm}(\sigma) + T_{\pm}(\bar{\sigma})]\delta'$$

$$\{T_{\pm}, T_{\mp}\} = 0$$

  – To je Virasoro algebra sa
  $\varepsilon^{\pm} = \varepsilon^{\pm}(\xi^{+}, \xi^{-})$.
  – Algebra 2D difeomorfizama:
  dve nezavisne kopije Virasoro algebre
  – Zamenjuje princip konformne invarijantnosti sa
  principom 2D reparametrizacione invarijantnosti
  – 2D metrika (konformni deo F) se kvantuje

Kvantna algebra

- – Prelaz sa klasične na kvantnu teoriju
  Polja $\longrightarrow$ Operatori

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu, \qquad \pi_\mu \longrightarrow \hat{\pi}_\mu, \qquad T_\pm(\varphi) \longrightarrow: \hat{T}_\pm(\varphi):$$

  $\varphi = \{G_{\mu\nu},\, B_{\mu\nu},\, \Phi\}$

  – Poisson-ove zagrade $\longrightarrow$ Komutatori

$$\{A, B\} = C \longrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}$$

- – Kao posledica normalnog uredjenja narušava se Virasoro algebra (narušavaju se 2D difeomorfizmi)

$$[\hat{T}_\pm(\sigma), \hat{T}_\pm(\bar{\sigma})] = i\hbar[\hat{T}_\pm(\sigma) + \hat{T}_\pm(\bar{\sigma})]\delta' +$$

$$[\hat{L}(\sigma) + \hat{L}(\bar{\sigma})]\delta' + [\beta^\Phi(\sigma) + \beta^\Phi(\bar{\sigma})]\delta'''$$
$$[\hat{T}_\pm(\sigma), \hat{T}_\mp(\bar{\sigma})] = 0$$

  gde je

$$\hat{L} \equiv (\beta^G_{\mu\nu} + \beta^B_{\mu\nu})\hat{O}^{\mu\nu}$$

  – 2D difeomorfizmi na kvantnom nivou $\Longleftrightarrow$
  Klasične prostorno vremenske jednačine kretanja

$$\beta^G_{\mu\nu}(\varphi) = 0, \quad \beta^B_{\mu\nu}(\varphi) = 0, \quad \beta^\Phi(\varphi) = 0$$

- – Moguće je naći **rešenja** i **simetrije** kompletnih prostorno vremenskih jednačine kretanja, čiji **eksplicitni oblik nije poznat**

Simetrije kompletnih jednačina kretanja

- – Uopštenje prilaza
  M. Evans, B. A. Ovrut, I. Giannakis, ...
  baziranog na konformnoj teoriji polja
  – Zamenom principa konformne invarijantnosti sa principom 2D reparametrizacione invarijantnosti
  – 2D metrika (konformni deo F) se kvantuje

- – Varijacija polja $\varphi \longrightarrow \varphi + \delta\varphi$ prouzrokuje
  $\hat{T}_\pm(\varphi) \longrightarrow \hat{T}_\pm(\varphi + \delta\varphi) = \hat{T}_\pm(\varphi) + \delta\hat{T}_\pm(\varphi)$
  – Ako je $\varphi + \delta\varphi$ takodje jednačina kretanja, sledi

$$[\hat{T}_\pm(\varphi+\delta\varphi)_\sigma, \hat{T}_\pm(\varphi+\delta\varphi)_{\bar{\sigma}}] = i\hbar[\hat{T}_\pm(\varphi+\delta\varphi)_\sigma+\hat{T}_\pm(\varphi+\delta\varphi)_{\bar{\sigma}}]\delta'$$

$$[\hat{T}_\pm(\varphi + \delta\varphi)_\sigma, \hat{T}_\mp(\varphi + \delta\varphi)_{\bar{\sigma}}] = 0$$

  – Uslovi simetrije jednačina kretanja

$$[\hat{T}_\pm(\sigma), \delta\hat{T}_\pm(\bar{\sigma})]+[\delta\hat{T}_\pm(\sigma), \hat{T}_\pm(\bar{\sigma})] = i\hbar[\delta\hat{T}_\pm(\sigma)+\delta\hat{T}_\pm(\bar{\sigma})]\delta'$$

$$[\hat{T}_\pm(\sigma), \delta\hat{T}_\mp(\bar{\sigma})] + [\delta\hat{T}_\pm(\sigma), \hat{T}_\mp(\bar{\sigma})] = 0$$

- Opšte rešenje

$$\delta_\Lambda\hat{T}_\pm(\sigma) = -i[\hat{\Gamma}_\Lambda, \hat{T}_\pm(\sigma)] \qquad \hat{\Gamma}_\Lambda = \int d\sigma\, \Upsilon(\Lambda(x), \hat{O})$$

Simetrije zatvorene strune

- – Tenzor energije impulsa bilinearan po srujama

$$\hat{T}_{\pm} = \mp \frac{1}{4\kappa} G^{\mu\nu} \hat{j}_{\pm\mu} \hat{j}_{\pm\nu} \qquad \hat{j}_{\pm\mu} = \hat{\pi}_\mu + 2\kappa (B_{\mu\nu} \pm \tfrac{1}{2} G_{\mu\nu}) \hat{x}^{\nu\prime}$$

$$\delta \hat{T}_{\pm} = \frac{1}{2\kappa} (\delta B_{\mu\nu} \pm \tfrac{1}{2} \delta G_{\mu\nu}) \hat{j}^{\mu}_{\pm} \hat{j}^{\nu}_{\mp}$$

  – Ako izaberemo generator u obliku

$$\hat{\Gamma}_\Lambda = 2\kappa \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \Lambda_\mu \hat{x}^{\mu\prime}$$

$$[\hat{\Gamma}_\Lambda, \hat{T}_{\pm}(\sigma)] = \frac{i}{2\kappa} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu) \hat{j}^{\mu}_{\pm} \hat{j}^{\nu}_{\mp}$$

  – tada su transformacije simetrije

$$\delta_\Lambda B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \qquad \delta_\Lambda G_{\mu\nu} = 0$$

Simetrije otvorene strune

- Drugačiji interval integracije

$$^\circ\hat{\Gamma}_\Lambda = 2\kappa \int_0^\pi d\sigma \Lambda_\mu(x) \hat{x}'^\mu$$

tako da granični član narušava simetriju

$$[^\circ\hat{\Gamma}_\Lambda, \hat{T}_\pm] = \frac{i}{2\kappa}(\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)\hat{j}_\pm^\mu \hat{j}_\mp^\nu \mp i\hat{j}_\pm^\mu \Lambda_\mu [\delta(\sigma - \pi) - \delta(\sigma)]$$

- Da poništimo nehomogeni član, menjamo izraz za struje i tenzor energije impulsa

$$^\circ\hat{j}_{\pm\mu} = \hat{j}_{\pm\mu} + \Delta j_\mu \,, \qquad ^\circ\hat{T}_\pm = \mp\frac{1}{4\kappa} G^{\mu\nu} \, ^\circ\hat{j}_{\pm\mu} {}^\circ\hat{j}_{\pm\nu}$$

- Tražimo $\Delta j_\mu(x)$ tako da izmenjena teorija ima istu simetriju kao zatvorena struna. Sledi
  $\delta_\Lambda \Delta j_\mu = 2\kappa \Lambda_\mu [\delta(\sigma - \pi) - \delta(\sigma)]$
  - Uvodimo novo polje $A_\mu(x)$ definisano samo na krajevima strune
    $\Delta j_\mu = -2\kappa A_\mu [\delta(\sigma - \pi) - \delta(\sigma)]$
  - čija ja kalibraciona transformacija

$$\delta_\Lambda A_\mu = -\Lambda_\mu$$

Dejstvo izmenjene teorije otvorene strune

- σ-model Lagranžijan
  ${}^\circ\mathcal{L} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - {}^\circ\mathcal{H}$, gde je ${}^\circ\mathcal{H} = {}^\circ T_- - {}^\circ T_+$
  Posle eliminacije impulsa π_μ na jednačinama kretanja

$$ {}^\circ S \equiv \int_\Sigma d^2\xi \ {}^\circ\mathcal{L} $$

$$ = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \quad \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(x) \quad \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu $$

$$ +2\kappa \int d\sigma A_\mu \dot{x}^\mu |_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} $$

  u saglasnosti sa Lagranževim prilazom

Reducibilnost

- Zatvorena struna– reducibilna teorija
  - za $\Lambda_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ je $\hat{\Gamma}_{\Lambda=\partial\varepsilon} = 2\kappa \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \varepsilon' = 0$
  - Isti zaključak sledi iz relacije

$$\delta B_{\mu\nu}/_{\Lambda=\partial\varepsilon} = (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)/_{\Lambda=\partial\varepsilon} = 0$$

- Teorija zatvorene strune nije reducibilna
  - za $\Lambda_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ sledi
    ${}^\circ\hat{\Gamma}_{\Lambda=\partial\varepsilon} \equiv {}^\circ\hat{\Gamma}_\varepsilon = 2\kappa \int_0^\pi d\sigma \varepsilon' = 2\kappa[\varepsilon(\pi) - \varepsilon(0)]$
  - Odgovarajuća kalibraciona simetrija je Abelova

$$\delta_\varepsilon B_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \delta_\varepsilon A_\mu = -\partial_\mu \varepsilon$$

  - što se takodje vidi iz relacije

$$[{}^\circ\hat{\Gamma}_{\varepsilon_1}, {}^\circ\hat{\Gamma}_{\varepsilon_2}] = 0$$

Nekomutativna elektrodinamika

- U prisustvu antisimetričnog polja $B_{\mu\nu}$, svetska zapremina Dp-brane, na kojoj se završavaju krajevi otvorene strune, postaje ne komutativna

- Za koordinate x^i, koje zadovoljavaju Neumann-ove granične uslove, nekomutativnost se pojavljuje samo na krajevima strune
$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \pm i\Theta^{ij}$ za $(\sigma = 0, \pi)$
$\Theta^{ij} = \frac{-1}{\kappa}(G - 4BG^{-1}B)^{-1}BG^{-1}$

- Sledi

$$[\varepsilon_1(\hat{x}), \varepsilon_2(\hat{x})] = \pm i\varepsilon_3(\hat{x})\,, \quad (\sigma = 0, \pi) \qquad \varepsilon_3 \equiv \Theta^{ij}\partial_i\varepsilon_1\partial_j\varepsilon_2$$

U unutrašnjosti strune koordinate komutiraju, dok je na krajevima strune

$$[{}^{\circ}\hat{\Gamma}_{\varepsilon_1}, {}^{\circ}\hat{\Gamma}_{\varepsilon_2}] = 2i\kappa\ {}^{\circ}\hat{\Gamma}_{\varepsilon_3}$$

Klasična reprezentacija

- $\Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{G}_\varepsilon$ gde $\mathcal{G}_\varepsilon$ zavisi od novih koordinata i impulsa, tražimo da
$$\{{}^\circ\mathcal{G}_{\varepsilon_1}, {}^\circ\mathcal{G}_{\varepsilon_2}\} = 2\kappa \; {}^\circ\mathcal{G}_{\varepsilon_3}$$
bude izomorfno sa gornjom kvantnom relacijom

- U zavisnosti od novih koordinata A_i i odgovarajućih impulsa P_j, koje zadovoljavaju Poisson-ove zagrade

$$\{A_i(x), P_j(\bar{x})\} = \delta_{ij}\delta^p(x - \bar{x})$$

rešenje je oblika

$${}^\circ\mathcal{G}_\varepsilon = 2\kappa \int dx[\varepsilon \star \partial_i P_j + (\varepsilon \star A_i - A_i \star \lambda) \star P_j]\delta^{ij}$$

gde je $\star$ Moyal proizvod.

- Kalibracione transformacije

$$\delta_\varepsilon A_i = \{A_i, \mathcal{G}_\varepsilon\} = -2\kappa D_i\varepsilon \;, \quad (D_i\varepsilon = \partial_i + A_i \star \varepsilon - \varepsilon \star A_i)$$

i jačina polja F_{ij}

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - \kappa(A_i \star A_j - A_j \star A_i)$$

$$\delta_\varepsilon F_{ij} = \kappa(F_{ij} \star \varepsilon - \varepsilon \star F_{ij})$$

Dejstvo

Iz relacije

$$\delta_\varepsilon(F^{ij} \star F_{ij}) = \kappa(F^{ij} \star F_{ij} \star \varepsilon - \varepsilon \star F^{ij} \star F_{ij})$$

sledi invarijantni izraz za dejstvo

$$S = \int dx \det G(F^{ij} \star F_{ij})$$

Sve je u saglasnosti sa rezultatima dobijenim Lagranževim metodom