



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ  
ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



# Интегрисани приступ настави физике и математике: одабрани примери за ученике гимназија

Дипломски – мастер рад

Ментор:  
проф. др Душанка Обадовић

Кандидат:  
Ненад Павловић

Нови Сад, 2011.

Захваљујем се ментору проф. др Душанки Обадовић на предложеној теми, на стрпљењу и помоћи током израде овог дипломског рада.

Захваљујем се проф. др Дарку Капору на корисним сугестијама.

## Садржај:

1. Увод .....	3
2. Математика у физици .....	5
2.1. Различита гледишта .....	5
2.2. Једначине у физици.....	5
2.2.1. Тело обешено о еластичну опругу.....	6
2.2.2. Фотоелектрични ефекат.....	7
2.2.3. Џул-Ленцов закон.....	7
2.3. Неочекивана решења .....	8
2.4. Релативистичка и нерелативистичка космологија.....	10
2.5. Геделов космос .....	11
3. Интердисциплинарни приступ решавању проблема.....	13
3.1. Тело на стрмој равни.....	13
3.2. Линеарне и квадратне функције. Парабола.....	14
3.3. Докази у геометрији помоћу механике .....	25
3.4. Детерминанте.....	30
3.5. Примена граничне вредности низа и интегралног рачуна у физици .....	32
4. Закључак .....	41
5. Литература .....	42
Кратка биографија кандидата .....	44
Кључна документацијска информација.....	45

# 1. Увод

Многи научници тврде да је физика највећа природна наука, односно да се налази на самом врху пирамиде природних наука. Међутим, постоји много дебата о томе шта је математика. Да ли је то језик физике, њено оруђе, или пак наука која се развила из физике као потреба за диференцијалним рачуном? Математичке методе се користе у физици, но математика није само средство изражавања у физици, то јест не може се рећи да представља само језик физике. Физика је, на првом месту, експериментална наука. Експериментом се доказују теореме, или се пак експерименти користе за прикупљање података на основу којих се утврђују законитости одређених појава. Са друге стране, теоријска физика развија идеје које се не могу проверити експерименталним путем, бар не на данашњем ступњу технолошког развоја. Физички концепти, начини размишљања се користе у математици, тако да се ни за физику не може рећи да представља само домен примене математике, где се одређени физички проблеми решавају искључиво применом математичког апарата. Физика пружа идеје и методе који су веома битни за даљи развој нових математичких теорија, па чак и нових дисциплина. Физика је својим проблемима учинила да математика у себи садржи много физике, као што је то случај са математичком физиком, која је и даље математика, али не би било коректно негирати њену везу са физиком. Математика и физика у средњој школи, какве их данас познајемо, су се толико удаљиле да постаје све теже замислити да обе могу заједно функционисати.

Многе ствари у математици, које на први поглед конфронтирају са физиком су у ствари са њом уско повезане. Са појавом теорије релативности и квантне физике део математичке физике се нагло почео развијати. Са развојем алгебре, геометрије и осталих математичких дисциплина долази до све већег повезивања математике и физике, јер су временом готово све дисциплине које су се сматрале чисто математичким, нашле своју велику примену у физици. Шта више, допринеле су доношењу нових теорија и нових погледа на свет, попут теорије струна. Са све већом применом математичких теорија у физици постаје јасно да је математика неодвојиви део физике.

Проучавање историје физике, без осврта на историју математике, и обрнуто, било би погрешно и непотпуно. Узимајући у обзир историјску димензију у развоју ове две науке, као и њихов однос у образовном систему, веза између математике и физике се не може игнорисати у њиховом проучавању.

Физичке и математичке теорије су се паралелно развијале, често као резултат рада једног истог научника, као што је то случај са развојем инфинитезималног рачуна и класичне теоријске механике, или векторске анализе и теорије електромагнетног поља. Нове математичке теорије, па и целе дисциплине су се јавиле као потреба за решавањем већ постојећих физичких проблема.

Изучавајући природу човек уствари изучава себе, свој ум. Он унапређује не само своје разумевање природе, већ своју способност да истражује ствари које у довољној мери не разуме. Стога је веома битно да се у проучавању одређених појава приступи паралелно са становишта посматрања физике и математике.

Физика, као природна наука користи математику као језик комуникације. У средњој школи, међутим, ово није у потпуности добро презентовано. Постоји много примера у пракси када наставник математике жели показати практичну примену неких једначина и на тај начин апстрактне једначине које фигуришу у математици повеже са реалним примерима из физике. Често се дешава да се том приликом апстракција објашњава апстракцијом, па тако реалистички пример уствари постаје нереалистички. Све ово изазива конфузију код ученика.

Наставник физике је у току свог школовања имао много више математике него што је наставник математике имао физику, тако да је баш он тај који би требало да покрене иницијативу за интегрисани приступ настави физике и математике, кроз разне примере и проблемске задатке који се могу упоредо разрађивати кроз ова два предмета.

Интердисциплинарни приступ уз коришћење савремених технологија чини процес учења математике много занимљивијим, лакшим и мотивише ученике да сами истражују одређене појаве, као и да сами постављају проблемске ситуације које се могу појавити у пракси.

Ученицима није довољно објаснити шаблоне по којима ће да решавају одређене врсте задатака, или да одговарају на одређена питања, већ их је потребно учити начину размишљања и дубљем разумевању одређених појава.

У пракси, сваки професор математике и физике се бар једном сусрео са питањима ученика: „Због чега морамо да учимо физику/математику?“ ; „Какве везе са реалним животом има ово што радимо?“ ; „Где се ово примењује?“ Одговоре на оваква питања, којима ће ученици бити задовољни и који ће их мотивисати за даљи рад, није ни мало лако дати. У ери савремених комуникација, интернета, лаке доступности података било које врсте, није довољно објаснити некоме да ће му то што се на часу ради можда некада затребати у животу, па ће тада видети праву сврху интегралног рачуна, редова или пак закона одржања енергије. Оваква знања ученика су практично неупотребљива. Тежња за повезивањем знања следи из праксе, из саме индустрије, где се као знање вреднује искључиво примењиво знање. Због тога се све више јавља потреба за повезивањем наука, предавањем на занимљиве начине и придавањем све више пажње практичном делу.

Циљ овог рада је да се укаже на потребу интегрисаног приступа у настави, који ће наставу учинити квалитетнијом и занимљивијом, како ученицима, тако и професорима. У раду је у неколико примера приказано како се градиво које се изучава на часовима математике понекад може много боље разумети уколико се изучава на примерима из физике. Неусклађеност у наставним програмима физике и математике представља проблем који доводи до недовољног разумевања одређених појава у физици. Интегрисани приступ, који ће помоћи у решавању овог проблема, није лако остварити у свим наставним јединицама. Међутим, тамо где је то могуће, треба тежити ка што већем повезивању знања. У раду су дати примери који се могу користити и на часовима математике и на часовима физике.

## 2. Математика у физици

### 2.1. Различита гледишта

Многи професори и ученици се слажу да је математика један од највећих проблема при учењу физике у средњој школи. Професори физике се често изненаде лошим знањем математике ученика на часовима физике, упркос њиховом успеху на часовима математике. Много пута се ученицима сугерише да је потребно да много више раде математику како би били успешнији у физици. Међутим, математика у физици није само математика. Једначине и математички изрази који се користе у физици не служе само да изразе апстрактну везу између неких величина, већ служе за описивање реалних физичких појава и процеса. Језик математике који се користи у физици се разликује од оног који се користи у математици. Прво, у математици је избор симбола доста ограничен. Променљиве ће готово увек бити  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , а константе дате бројним вредностима, или симболима  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . У физици се користи много више симбола. Једначине у физици које садрже само један симбол су веома ретке а за физичке константе се не може рећи да представљају само бројеве, већ везу неких реалних величина или појава. Такође, веома се разликује начин интерпретације одређених симбола. Занимљив је начин интерпретације следећег проблема:

$$\text{Ако је} \quad A(x, y) = B(x^2 + y^2) \quad (2.1)$$

$$\text{Колико је} \quad A(r, \theta) = ?$$

Многи физичари као одговор на ово питање дају  $A(r, \theta) = Br^2$ . Разлог је једноставан. Израз у загради  $(x^2 + y^2)$  је комбинација која најчешће подсећа на израз  $r^2 = x^2 + y^2$ , где  $r$  представља растојање неког тела, односно тачке од координатног почетка Декартовог координатног система у равни. Стога, растојање тела, односно тачке од координатног почетка изражен у поларним координатама може да се представи са  $r$ , док се угао  $\theta$  користи при пројекцији на  $x$  и  $y$  осу. Са друге стране, већина математичара би инсистирала да је тачан одговор  $A(r, \theta) = B(r^2 + \theta^2)$ . Њихово објашњење лежи у томе да задата функција говори да је потребно узети суму квадрата задатих аргумената, и ту суму помножити са  $B$ . Ово објашњење делује доста логично. Проблем у оваквој интерпретацији, међутим, је веома једноставан. Не могу се сабирати  $r^2$  и  $\theta^2$  јер немају исте јединице! Математичари нису навикли да узимају у обзир јединице, па је према томе за њих ово сабирање дозвољено јер на  $r$  и  $\theta$  гледају искључиво као на бројеве. [13]

### 2.2. Једначине у физици

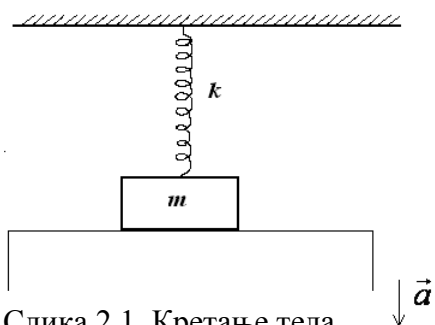
При решавању проблема, физичари поставе једначине из којих изразе тражену величину преко осталих које фигуришу у једначинама, и тек тада убацују бројне вредности уместо симбола. Ово нема везе само са једноставношћу у рачуну, јер физичари једначине не виде само као комбинацију различитих симбола већ као везу између реалних процеса, што омогућава много лакше манипулисање самим физичким величинама у току решавања

једначина. Многи ученици, поготово у свом почетку изучавања физике, имају тенденцију ка убацивању бројних вредности у једначине, што је пре могуће. На овај начин, једначине за њих постају сличније оним једначинама које раде на часовима математике, са много мање „непознатих“. При томе, не воде рачуна о јединицама које могу бити добра провера исправности образаца и поступка рада, већ их додају на крају рачуна.

### 2.2.1. Тело обешено о еластичну опругу

Ученици се могу навићи да не замењују прерано бројне вредности у једначине помоћу низа задатака у којима познате величине нису изражене бројним вредностима већ симболима или задаци у којима се тражи не само решење неког проблема већ и дискусија, као на пример у следећем задатку:

*На постољу лежи тело обешено за плафон помоћу лаке еластичне опруге. У почетном тренутку опруга је недеформисана. Постоље се затим почне спуштати константним убрзањем  $a$ . После колико времена ће се тело одвојити од постоља? Шта се дешава у случају када маса тела тежи нули, а шта када тежи бесконачности? Коефицијент еластичности опруге је  $k$ , а маса тела  $m$ . [7]*



Слика 2.1. Кретање тела обешеног о опругу

На тело навише делује еластична сила, пошто се опруга издужује, и нормална реакција подлоге  $N$ . Заједно са постољем се креће тело убрзањем  $a$  па важи једначина:

$$ma = mg - F_e - N \quad (2.2)$$

У тренутку одвајања је  $N = 0$  одакле следи:

$$ma = mg - F_e \quad (2.3)$$

$$ma = mg - kx = mg - k \frac{1}{2} at^2 \quad (2.4)$$

Одавде је

$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}} \quad (2.5)$$

Из последње једначине се види да у случају када маса тела тежи нули, тада и време одвајања тела од подлоге тежи нули, што значи да се тело одваја од подлоге чим започне кретање, а у случају када маса тела тежи бесконачности тада време одвајања тела од подлоге такође тежи бесконачности, из чега се може закључити да се тело ни у једном моменту неће одвојити од подлоге а да ће се опруга прво издеформисати а затим доћи до прекида контакта између тела и опруге.

### 2.2.2. Фотоелектрични ефекат

У физици се једначине не могу проучавати без узимања у обзир њиховог значења. Леп пример је фотоелектрични ефекат. Фотоелектрични ефекат је појава емисије електрона са површине метала, када је осветљен видљивом или ултраљубичастом светлошћу. Уколико ученици нису добро упознати са природом фотоэффекта може доћи до проблема у тумачењу односа између величина које описују ову појаву. Ученицима може бити постављено следеће питање: *Ако нека вредност таласне дужине светлости  $\lambda_1$  доводи до тога да електрони не буду емитовани са површине метала при одређеној вредности заочног потенцијала, шта ће се десити уколико се исти метал осветли светлошћу веће таласне дужине?* Многи ученици проблем посматрају искључиво математички. Уколико би се пажња ученика усмерила на облик Ајнштајнове једначине фотоэффекта који повезује заочни напон и фреквенцију:

$$h\nu = A_i + eU_z, \quad (2.6)$$

где је  $h$  - Планкова константа,  $A_i$  - излазни рад електрона,  $e$  - наелектрисање електрона,  $U_z$  - заочни напон, напон који зауставља све електроне који напусте металну электроду, може доћи до потпуно погрешне интерпретације саме појаве. Ученик би могао да претпостави *обзиром да је је фреквенција повезана са таласном дужином, промена таласне дужине доводи до промене фреквенције, а пошто у једначини сада фигурише нека нова фреквенција више немамо нулу, што доводи до појаве избијања електрона.*

Физичари ову једначину виде као закон одржања енергије; енергија коју фотон предаје електрону троши се на рад који је потребан електрону да напусти атом. Уколико је енергија фотона већа од излазног рада, тај део се претвара у кинетичку енергију електрона, која се у овом случају троши на савлађивање заочног напона. Суштина лежи у томе да уколико фотон не преда електрону енергију довољну да напусти атом (минимална енергија је  $h\nu = A_i$ ), једначина фотоэффекта се не може применити, јер фотон не може избацити електрон који има негативну вредност кинетичке енергије, како би морало да следи из једначине. Уколико би се једначина посматрала чисто математички, не би се обратила пажња да израз  $eU_z$  представља кинетичку енергију, што доводи до потпуно погрешне интерпретације саме појаве. [13]

### 2.2.3. Џул-Ленцов закон

На исти начин, често долази до великих потешкоћа при тумачењу Џул-Ленцовог закона који даје израз за топлоту која се ослобађа у проводнику кроз који протиче електрична струја:

$$Q = RI^2t \quad (2.7)$$



Закон се може формулисати на следећи начин: *Количина топлоте која се ослободи у проводнику сразмерна је квадрату јачине електричне струје која кроз њега протиче, електричној отпорности тог проводника и времену протичања ове струје.*

Проблем настаје када ученици примене Омов закон ( $I = \frac{U}{R}$ ) на овај образац, одакле следи:

$$Q = \frac{U^2}{R}t \quad (2.8)$$

Питање које ствара проблем је следеће: *Уколико се жели ослободити већа количина топлоте, да ли је потребно користити отпорник мање или веће отпорности?*

Ове две формулације Џул-Ленцовог закона дају на први поглед контрадикторне одговоре, јер је у првом случају потребно користити отпорник веће, а у другом случају отпорник мање отпорности. Математички посматрано, није могуће дати решење, јер разматрање било које релације, за коју мора да важи Омов закон, доводи до вртења у круг. Решење лежи у физичком тумачењу закона. Количину топлоте  $Q$  ослобађају електрони приликом „судара“ са атомима и молекулима у проводнику кроз који се крећу. Јачина струје једнака је броју електрона који у јединици времена прођу кроз јединицу површине проводника. Што се већи број електрона креће кроз проводник, то јест што је већи интензитет струје  $I$ , то се ослободи већа количина топлоте. У случају када је напон константан, са повећањем отпора по Омвом закону долази до смањења интензитета струје (чија јачина је обрнуто пропорционална отпору у колу), мање електрона губи енергију, па се ослобађа много мања количина топлоте. У овом случају је количина топлоте која се ослободи у проводнику обрнуто пропорционална отпору кола, па важи једначина  $Q = \frac{U^2}{R}t$ . Ако је јачина струје која пролази кроз проводник константна, са повећањем отпора долази до повећања напона јер је потребна већа разлика потенцијала да би се одржао број електрона који у јединици времена пролази кроз проводник. Пошто исти број електрона који у јединици времена пролази кроз проводник наилази на већи отпор, губи се више енергије што значи да се ослобађа већа количина топлоте, која је у овом случају директно пропорционална отпору кола, па за овај случај важи једначина  $Q = RI^2t$ .

### 2.3. Неочекивана решења

Математички модели представљају моћан алат за решавање модела у физици. Помоћу добрих модела се може предвидети еволуција физичког система током времена, анализирањем стања у коме се систем налази или у којем се налазио. Математички модели понекад дају неочекивана решења, описујући физичку ситуацију какву физичари не очекују при употреби таквог модела. Ово често доводи до стварања нових физичких модела, па и новог погледа на свет у коме живимо. Међутим, нека решења описују систем чије постојање није реално. Дешава се да за одређену физичку ситуацију постоји више математичких модела, као што је то у следећем примеру.

Камион се креће праволинијски константном брзином  $v_k$ . У моменту када се приближи аутомобилу, који се налази у другој траци, до растојања  $s_0$ , аутомобил започиње кретање из стања мировања у истом правцу и смеру као и камион. Да ли ће доћи до сусрета камиона и аутомобила, и уколико дође, после колико времена ће се то десити?

Решење, наравно зависи од растојања  $s$ , брзине  $v_k$  и убрзања аутомобила.

Путеви које прелазе камион и аутомобил су дати једначинама:

$$s_k = v_k t \quad \text{и} \quad s_a = \frac{at^2}{2} \quad (2.9)$$

Да би се сусрели мора да важи:

$$s_k = s_0 + s_a \quad (2.10)$$

Одакле следи:

$$v_k t = s_0 + \frac{at^2}{2} \quad (2.11)$$

$$at^2 - 2v_k t + 2s_0 = 0 \quad (2.12)$$

Математички гледано, добија се квадратна једначина која нуди два решења:

$$t_1 = \frac{v_k + \sqrt{v_k^2 - 2as_0}}{a} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{v_k - \sqrt{v_k^2 - 2as_0}}{a} \quad (2.13)$$

На први поглед ово делује збуњујуће јер ни једно решење се не може без аргумента одбацити, па се поставља питање које решење је тачно. Анализирајући израз под кореном може се закључити да су могућа три сценарија:

1.  $v_k^2 - 2as_0 < 0$ . Као решења се добијају комплексни бројеви, па је ситуација која се описује овом једначином нерeална. То значи да не важи једнакост  $s_k = s_0 + s_a$ , одакле се може закључити да камион неће стићи аутомобил.

2.  $v_k^2 - 2as_0 = 0$ . При овим условима се добијају иста решења за  $t_1$  и  $t_2$ , па се може рећи да ће камион стићи аутомобил после времена  $t = \frac{v_k}{a}$ .

3.  $v_k^2 - 2as_0 > 0$ . У овом случају оба решења, и  $t_1$  и  $t_2$  су реална, где је  $t_1 > t_2$ . Физичко објашњење се огледа у следећем: Камион после времена  $t_2$  стигне аутомобил, прстигне га, а затим, после времена  $t_1$  од почетка кретања аутомобила, аутомобил сустиже камион, долази до поновног сусрета и аутомобил прстиже камион, након чега се више никада не сусретну. Математички модели, понекад, дају нека решења чак и када се то од њих ни не очекује. [8]

## 2.4. Релативистичка и нерелативистичка космологија

Нерелативистичка космологија Васиону третира као бесконачну и стационарну и заснована је на Њутновом закону гравитације. Ово подразумева примену еуклидске геометрије у простору независно од расподеле масе у њему и бесконачну брзину гравитационе интеракције. Овакав модел Васионе, који је дуго био актуелан, поред тога што се сусретао са парадоксима није могао да објасни појаву црвеног помака, односно појаве померања линија у спектру светлости која долази са удаљених звезда ка црвеном делу спектра, услед њиховог удаљавања. Први космолошки модел заснован на општој теорији релативности је изградио Ајнштајн. У општој теорији релативности Ајнштајн је искористио математику нееуклидске геометрије за опис гравитације као узрока закривљености простор-времена. Ајнштајн није успео да нађе решење својих једначина које би описивало геометрију простор-времена за целу Васиону, која је према тадашњем мишљењу била статична, хомогена и изотропна. Под утицајем идеја које су владале у космологији у то време он је решавао проблем стационарне Васионе, и није успео да у оквирима хомогеног и изотропног модела добије стационарна решења. Да би модел функционисао, Ајнштајн је увео једну нову константу у своје једначине, такозвани космолошки члан, којим је описана допунска хипотетичка сила пропорционална растојању између два тела. У Ајнштајновом моделу космолошка константа има вредност која обезбеђује да при произвољној коначној вредности густине уведена одбојна сила компензује силу гравитационог привлачења. На овај начин је стационарност обезбеђена. Функција космолошке константе била је да уравнотежи силу гравитације на великим растојањима. Фридман је, напуштајући идеју о стационарности Васионе, показао да се решења једначина опште теорије релативности могу добити без увођења космолошке константе. Космолошка константа више није била потребна и Ајнштајн је зажалио што је икада и увео ову константу у своје формуле.

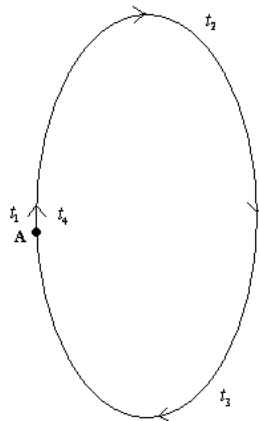
Међутим, многи видови природе тамне енергије, која чини преко 70% укупне енергије у васиони, још увек су непознати. Космолошка константа је у данашње време још увек предмет многих полемика. Иако њена природа није у потпуности растумачена, она представља најједноставније објашњење убрзаног ширења свемира.

Математичке једначине су, у овом случају, дале одговор на питање о моделу Васионе, чак иако им ни сам Ајнштајн није веровао. И не само то. Анализирајући једначине може се вршити дискусија о еволуцији Васионе, о томе како је она изгледала у првим тренуцима свог постојања и шта ће се са њом даље дешавати. Математичке једначине којима се описује неки физички систем су углавном веома богате информацијама те дају много различитих манифестација система, чак и оне које се ни не очекују. Правилно тумачење

математичких једначина готово увек води до тачних физичких теорија. Понекад се тумачењем математичких једначина добијају чудни физички модели, па се поставља питање да ли таква решења заиста описују реалне физичке ситуације.

## 2.5. Геделов космос

Ајнштајнове једначине поља представљају скуп од десет једначина које описују гравитациону интеракцију у склопу Опште теорије релативности. Као што је електромагнетно поље наелектрисане честице описано Максвеловим једначинама, тако се Ајнштајновим једначинама описује геометрија простор-времена која је одређена присуством масе и енергије у датом простору. Општа теорија релативности описује гравитацију као манифестацију геометрије простор-времена. Материја саопштава простор-времену како да се закриви, а закривљено простор-време саопштава материји како да се понаша. Решење Ајнштајнових једначина одређује метрику простор-времена. Ове једначине се не могу увек (у општем случају) потпуно решити, без увођења одређених апроксимација. Постоје, са друге стране, егзактна решења (на пример Шварцшилдово решење), чије проучавање је предвидело постојање црних рупа и различитих модела еволуције свемира. Нека решења Ајнштајнових једначина доводе до крајње чудних модела. Један такав пример је Геделов космос, који се односи на затворену криву времена. Геделов космос допушта путовање у прошлост.



Слика 2.1. Геделов космос

Посматрач се налази у тачки А (слика 2.1) и креће се у простор-времену дуж правца означеног стрелицом. Време које мери својим часовником у тачки А је  $t_1$ . После неког времена сат показује вредност  $t_2$ , при чему је  $t_2 > t_1$ . Након тога долази до следеће тачке на свом путовању кроз простор-време у којој запажа време  $t_3 > t_2$ . На крају долази поново у тачку А, тачку из које је започео путовање, после времена  $t_4$ . Према томе, он ће у тачки А срести себе у прошлости у ситуацији у којој се налазио када је започињао ово путовање. Математички гледано, путовање у прошлост је могуће. Физички гледано, постоје многи примери који доводе до апсурда овакво решење. Један од њих, помало морбидан, говори о ситуацији да посматрач оде у прошлост и убије себе млађег. Шта би се онда десило? Да ли би посматрач једноставно истог момента престао да постоји? Пошто би преминуо, ко би

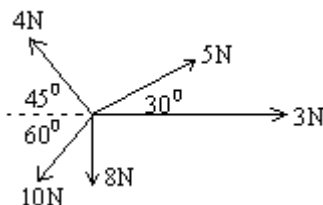
убио посматрача ако се његово путовање ту завршава? Очигледно да посматрач не може убити себе путовањем у прошлост, јер мора преживети убиство да би постао убица. Путовањем у прошлост, дакле, не може се мењати историја. [8]

### 3. Интердисциплинарни приступ решавању проблема

У пракси се ретко када дешава да се један исти пример разматра на часу математике и физике при изучавању новог градива. Када се такав пример и појави, ученици то често нерадо прихватају ограђујући се од тога тврдњом да је то што се изучава на часу математике уствари физика коју они не разумеју довољно, или пак обрнуто на часу физике. Интердисциплинарни приступ, стога, у самом почетку неће од стране свих ученика бити одмах прихваћен. Међутим, дугорочно гледано, овакав приступ би требало да попуни многе рупе у знању ученика и на неки начин их натера да неком конкретном проблему приступају много шире.

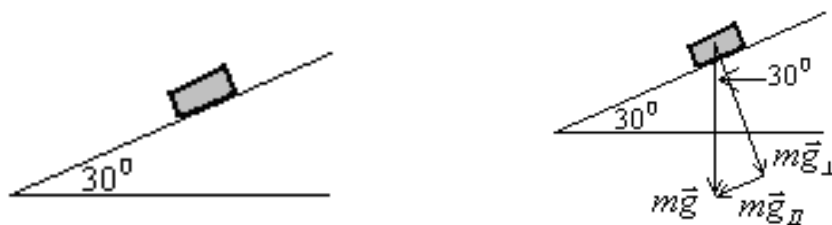
#### 3.1. Тело на стрмој равни

Уколико се разматра случај тела на плочи постављеној под неким углом у односу на хоризонт, научни модел представља тело на стрмој равни на које делује сила Земљине теже која се може разложити на две компоненте: компонента паралелна плочи и компонента нормална на плочу. При томе, јављају се сила трења  $\vec{F}_r$  и сила нормалне реакције подлоге  $\vec{N}$ . Решавањем овог проблема се добијају математичке једначине које дају додатне информације, на пример о максималном углу стрме равни при којем тело и даље мирује. Ово представља најчешћи пут којим се изучава нека појава; постави се проблем из реалног живота, формулише математички модел и помоћу једначина представи као математички проблем. Када се математички проблем реши, решење се упућује на почетак и врши се његова интерпретација у проучавању реалних ситуација. У конкретном примеру до проблема у решавању може доћи услед недовољног разумевања појма вектора. Главни разлог је у неусклађености у програмима математике и физике у гимназијама. Док се у физици вектори раде на почетку прве године, у математици се раде пред крај првог полугодишта, после подударности углова и троуглова који су такође неопходни при решавању оваквих проблема. Искуство показује да је при проучавању вектора ученицима много лакше да схвате природу самих вектора уколико их вежу за реална тела и посматрају реалну ситуацију, као у случају када се вуче неко тело у два различита правца. Ученици могу да „осете“ дејство два вектора и да непознавајући правило сабирања вектора сами претпоставе у ком правцу ће се кретати тело. Ово доводи до јасног разумевања сабирања вектора правилом паралелограма, које је математички еквивалентно сабирању вектора правилом троугла, но у својој суштини је природнији пут при усвајању појма сабирања вектора. Ова готово неприметна разлика може довести до грешака у моделовању физичких феномена. Када се ученици сусретну са задатком представљеним на слици 3.1, где је потребно одредити интензитет резултујућег вектора дуж хоризонтале, апсолутна већина ученика без већих проблема ово реши.



Слика 3.1. Сабирање вектора

Међутим, исти ученици нису ни близу тако ефикасни када је у питању проблем представљен на слици 3.2.

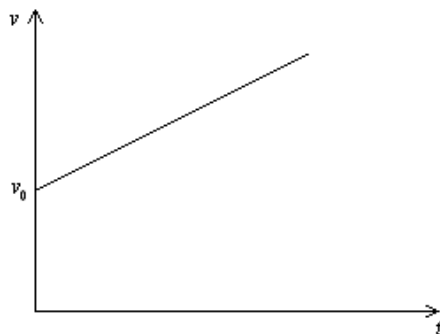


Слика 3.2. Тело на стрмој равни

Често се дешава да ученик нацрта силу Земљине теже, разложи вектор знајући правило троугла, а затим компоненту која је паралелна са плочом потпуно занемари у решавању проблема, најчешће због тога што је она удаљена од тела и ученик „не осети“ њено дејство на тело. [10] Раскорак у програмима математике и физике, као у случају вектора, сличности и подударности углова и троуглова, доводи до проблема у изучавању градива. Стога је битно да настава математике прати наставу физике, и обрнуто, како би се, у конкретном случају, боље стекао појам вектора и пре примене на конкретним задацима добро провежбао на часовима математике.

### 3.2. Линеарне и квадратне функције. Парабола

Да би се боље разумеле законитости равномерно праволинијског кретања, као и кретања са сталним убрзањем, потребно је да ученици добро баратају појмовима линеарних и квадратних једначина. Под линеарном једначином „по  $x$ “ се подразумева свака једначина са непознатом  $x$  која се еквивалентним трансформацијама своди на једначину облика  $ax = b$ . Овакве једначине се још називају и полиноми првог степена. Називају се линеарнима јер се могу представити правом линијом у Декартовом координатном систему, као што је то представљено на слици 3.3.

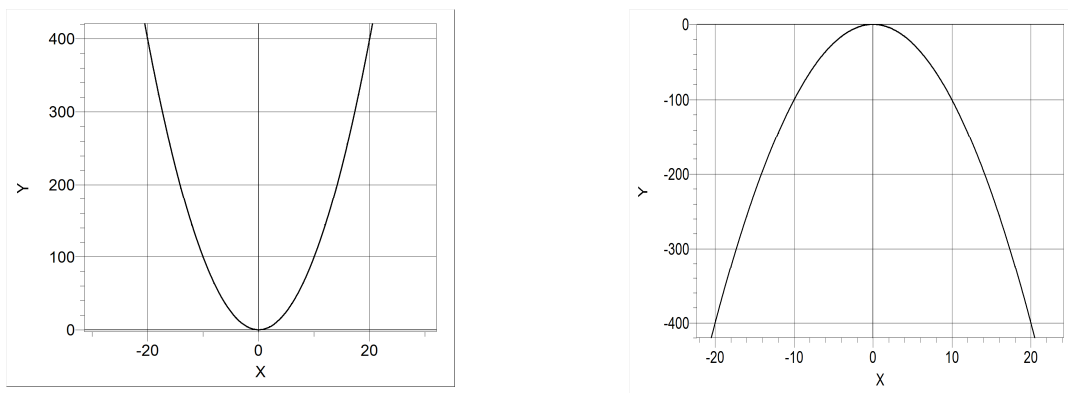


Слика 3.3. Брзина код равномерно убрзаног кретања

Општи облик линеарне функције дат је релацијом  $y = kx + n$ , где је  $k$  коефицијент правца, односно  $k = tg\alpha$ , где је  $\alpha$  угао који права гради са позитивним смером  $x$ -осе а  $n$  одсечак на

у–оси. Коэффициент  $k$  може бити позитиван, при чему повећање вредности дуж  $x$ –осе одговара повећању дуж  $y$ –осе. Уколико је коэффициент  $k$  негативан тада повећање вредности дуж  $x$ –осе одговара смањењу вредности дуж  $y$ –осе, и обрнуто. Када је коэффициент правца једнак нули, вредност на  $y$ –оси се не мења са повећањем вредности на  $x$ –оси, што резултира хоризонталном линијом на графику.

Једначине које у себи садрже чланове  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^{\frac{1}{2}}$  су нелинеарне једначине. Квадратна функција је полиномна функција облика  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где је  $x$  – непозната, а  $a$ ,  $b$  и  $c$  реални бројеви ( $a \neq 0$ ). График квадратне функције, без обзира на њен облик, је парабола. [11]



Слика 3.4. Графици функција  $f(x) = x^2$  и  $f(x) = -x^2$

Уколико је  $a > 0$  парабола је отворена према горе, а уколико је  $a < 0$  парабола је отворена према доле. Коэффициент  $a$  контролише брзину раста или опадања квадратне функције из темена. Што је вредност за  $a$  већи позитиван број, то функција брже расте и график је затворенији, и обрнуто. Израз  $ax^2 + bx + c$  је полином другог степена. Ако је квадратна функција једнака нули, тада је резултат квадратна једначина чија се решења називају корени једначине или нуле функције.

У физици, уколико тело прелази једнака растојања за једнаке временске интервале, пут који пређе дат је као производ брзине и одговарајућег времена за које је тело прешло тај пут,  $s = vt$ , где је време независна а брзина зависна величина. Уколико се ова зависност представи графички добиће се права линија, зато што је брзина константна, а коэффициент правца одговараће брзини тела. Исто тако, уколико се посматра график са слике 3.3 и на њему примени једначина праве  $y = kx + n$ , може се одредити убрзање тела и уопште доћи до зависности пређеног пута од брзине тела код убрзаног кретања:

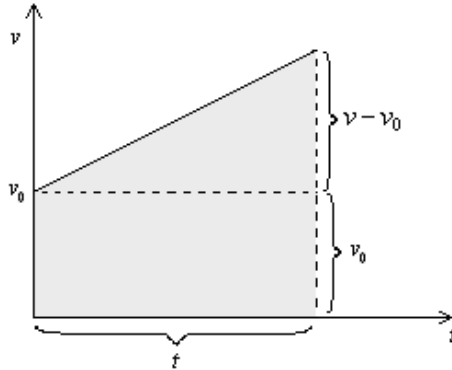
$$v = v_0 + kt, \tag{3.1}$$



где  $k$  представља коефицијент правца праве и димензионо одговара односу брзине и времена па представља убрзање тела. На тај начин се долази до израза за брзину тела код равномерно убрзаног кретања у било ком тренутку кретања:

$$v = v_0 + at \quad (3.2)$$

Одавде следи да се убрзање тела са графика може одредити рачунањем коефицијента правца праве. [5]



Слика 3.5. Пут код равномерно убрзаног праволинијског кретања

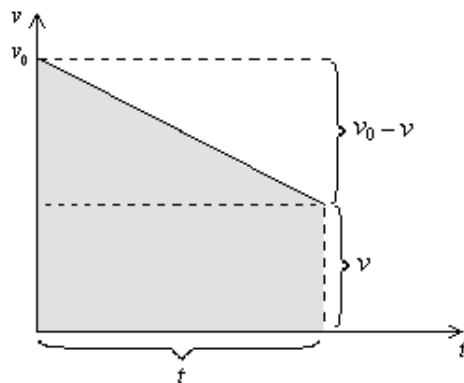
Димензионом анализом (слика 3.5) се закључује да површина испод графика зависности брзине од времена одговара пређеном путу:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t \quad (3.3)$$

Из обрасца 3.2 је  $v - v_0 = at$  па следи

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}(at)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (3.4)$$

Аналогно, анализом графика зависности брзине од времена код равномерно успореног праволинијског кретања се добијају формуле за брзину и пређени пут:



Слика 3.6. Пут код равномерно успореног праволинијског кретања

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}(v_0 - v)t \quad (3.5)$$

Пошто се ради о равномерно успореном кретању, важи

$$v = v_0 - at \quad (3.6)$$

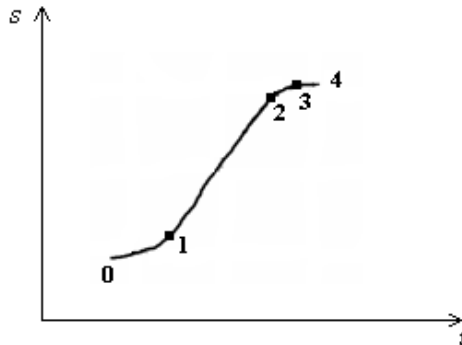
Одакле следи

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}(at)t = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \quad (3.7)$$

Елиминацијом времена се добија зависност пређеног пута од брзине тела, која у општем случају износи:

$$v^2 = v_0^2 \pm 2as \quad (3.8)$$

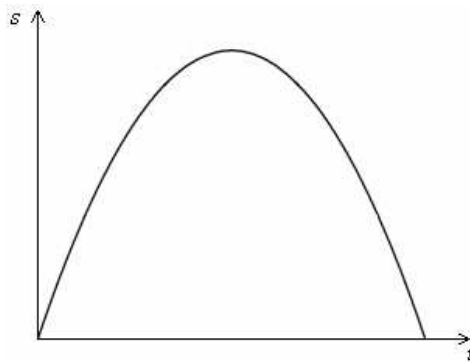
Уколико се брзина тела константно мења током времена, то значи да се и коефицијент правца константно мења, што значи да се на графику зависности пређеног пута од времена ова нелинеарна зависност представља кривом линијом.



Слика 3.7. График пређеног пута код праволинијског кретања

Закривљеност линије на графику са слике 3.7 даје информацију о брзини кретања тела. Брзина тела једнака је коефицијенту правца тангенте у било којој тачки криве на графику и пропорционална је нагибу тангенте. Према томе, нагиб тангенте је веома користан математички алат при проучавању графика кретања неког тела. Може се закључити да у интервалу 0-1 тело убрзава, у интервалу 1-2 се креће константном брзином, од 2-3 успорава и од 3-4 мирује.

Уколико се лопта баца вертикално навише, на њу све време кретања делује сила Земљине теже вертикално наниже, што узрокује зависност помераја од времена представљену на слици 3.8.



Слика 3.8. Померај лопте при бацању увис

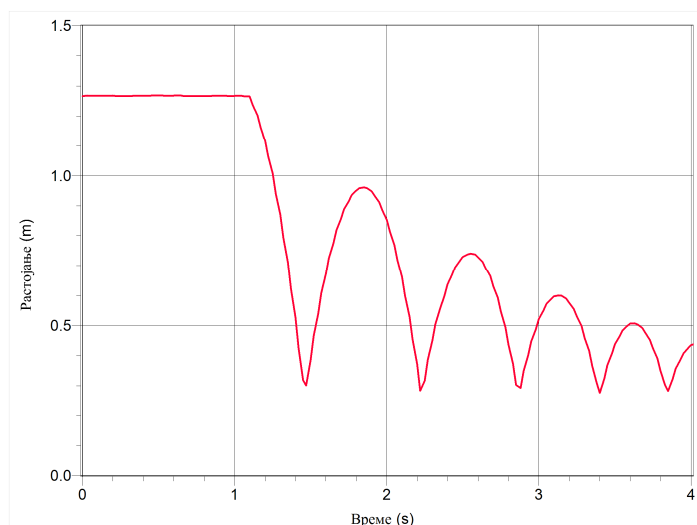
Анализирајући нагиб тангенте може се закључити да током прве половине пута тело константно успорава јер се нагиб константно смањује, да у највишој тачки путање тело има брзину једнаку нули, јер је тангента хоризонтална па је коефицијент правца једнак нули, а после тога тело константно повећава своју брзину у супротном смеру, јер је коефицијент правца овај пут негативан. Путања тела се назива параболом, а једначина кретања тела је квадратна једначина, с обзиром да се положај тела мења са квадратом времена.

Са разумевањем, интерпретацијом и анализом графика кретања, ученицима постају јасније везе између брзине, убрзања, пређеног пута и времена. На овај начин се знање математике примењује и утврђује, а формуле и законитости у физици се уче са много више разумевања. Овакав начин учења је битан јер неки ученици веома добро решавају задатке са једначинама, док им је разумевање њиховог физичког смисла веома слабо, што не доводи до напретка у њиховом размишљању.

Графици који се проучавају се могу добити помоћу сензора покрета који користи ултразвучне сигнале да одреди положај неког тела у току времена. Сензор у току једне секунде шаље неколико ултразвучних импулса фреквенције око 50 kHz који се одбијају и враћају до уређаја који мери време кретања сигнала, које је пропорционално удаљености до предмета. Сензор је повезан са рачунаром и одговарајућим софтвером у коме се графички приказује зависност брзине предмета или растојања од сензора у току времена. Овакво снимање графика је много интересантније ученицима јер се њихово проучавање своди на проучавање појаве коју су имали прилике да виде у тренутку снимања графика, што доста олакшава само проучавање. [18]

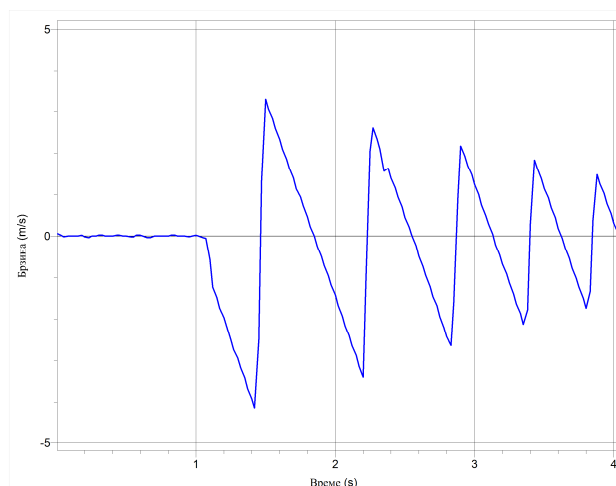
Ученици проучавају две врсте графика; график зависности положаја од времена  $x(t)$  и график зависности брзине од времена  $v(t)$ . График представљен на следећој слици је

добијен детектовањем положаја кошаркашке лопте која је пуштена да слободно пада испод детектора покрета.



Слика 3.9. Растојање лопте пуштене да слободно пада

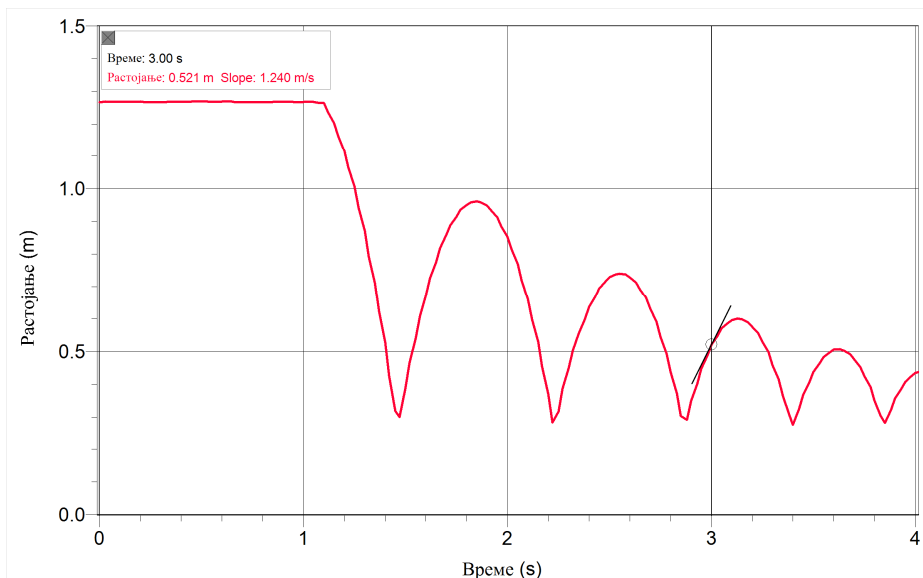
Један од задатака ученика може бити да на основу графика  $x(t)$  нацртају график  $v(t)$ . Или да на графику  $x(t)$ , у неким карактеристичним тачкама, одреде брзину коју је тело имало у том тренутку.



Слика 3.10. Брзина лопте пуштене да слободно пада

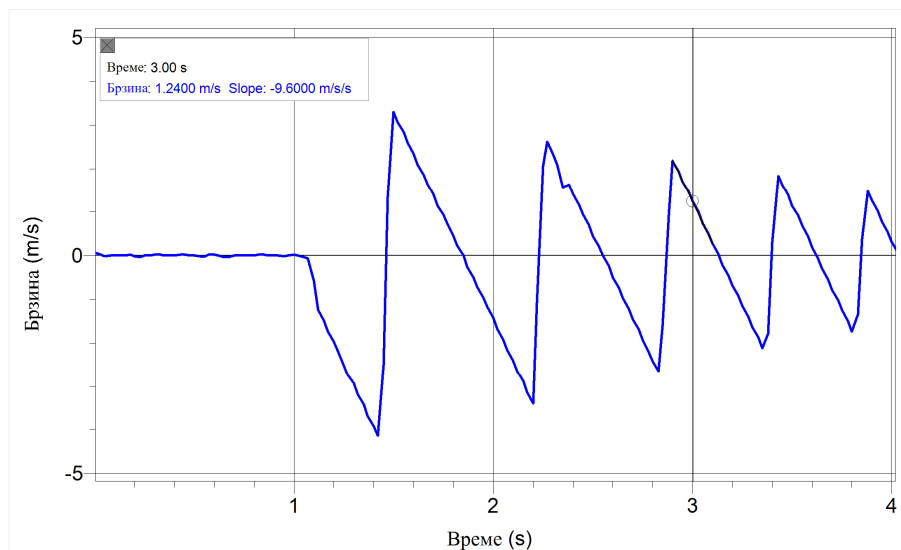
Ученици цртају тангенту у карактеристичној тачки и одређују коефицијент правца, након чега резултате проверавају помоћу графика  $v(t)$ . Ово је можда добар моменат да се ученицима спомене појам диференцирања, који ће им на часовима математике бити објашњен две године касније.

На графику на слици 3.11 је у тачки где је  $t = 3\text{s}$  нацртана тангента чији коефицијент правца одговара брзини лопте у том тренутку која износи  $v = 1,24\text{m/s}$ .



Слика 3.11. Одређивање брзине са графика  $x(t)$

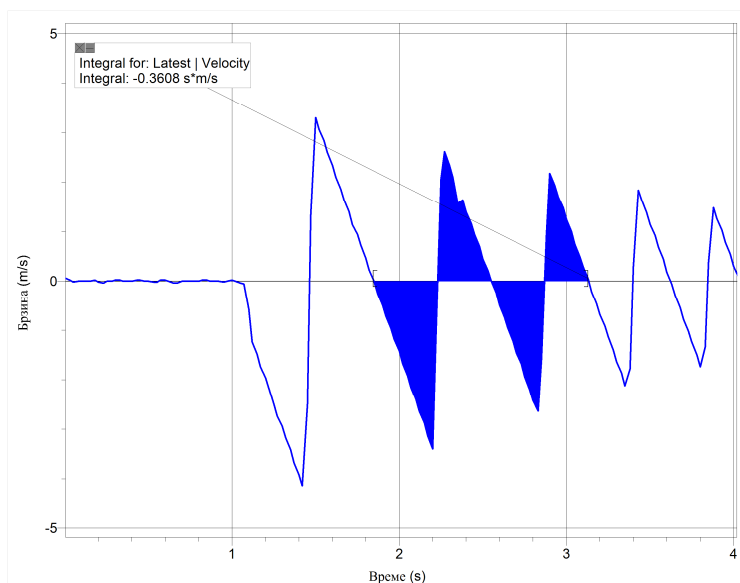
Поређењем са графиком са слике 3.12 види се да се за исти временски тренутак добија исти резултат за брзину.



Слика 3.12. Брзина и убрзање у тренутку  $t = 3\text{s}$

Површина испод графика  $v(t)$  одговара пређеном путу. Укупан пређени пут у одређеном интервалу времена бројно је једнак укупној површини испод графика  $v(t)$  у посматраном временском интервалу. Померај тела се добија одузимањем површина које одговарају негативној вредности брзине од површина које одговарају позитивној вредности брзине.

Уколико се рачуна површина испод кривих од тачке где је  $t = 1,85s$  до тачке где је  $t = 3,13s$  (у тим тачкама је брзина једнака нули, а лопта достиже највишу тачку путање) добија се вредност помераја од  $s = -0,361m$ .



Слика 3.13. Одређивање пређеног пута са графика  $v(t)$

Ова вредност одговара померају на графику  $x(t)$  од  $s = 0,600m - 0,961m = -0,361m$ . Ово је растојање између висина до којих се попне лопта после првог и трећег одскока од подлоге. Негативан знак говори о смањењу растојања и брзине у односу на подлогу током времена. Због тога се интегралењем површине испод графика  $v(t)$  између било које две тачке које одговарају истој вредности брзине, увек добија већа вредност површине која одговара негативној вредности брзине него површине која одговара позитивној вредности брзине.

Вредности које су израчунате са графика су компјутерски израчунате. Ученици неће бити толико прецизни у одређивању коефицијента тангенте, као ни површине испод графика, но приближне вредности су свакако прихватљиве као добра потврда исправности теорије. Такође, ово може бити добар моменат да се спомене појам интегралног рачуна који ће свакако на часовима математике бити детаљно проучен у четвртом разреду гимназије.

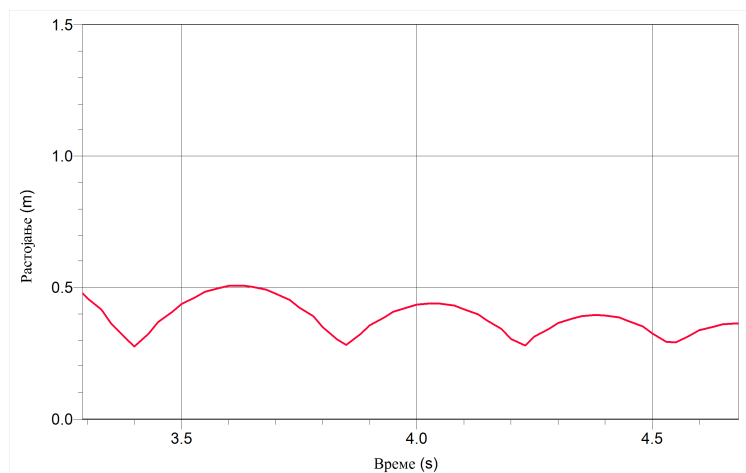
Са графика  $v(t)$  се помоћу коефицијента правца тангенте може израчунати вредност убрзања. То значи да се убрзање Земљине теже може приближно одредити помоћу сензора покрета и лопте, што наставу физике чини много занимљивијом. У овом случају, за вредност убрзања Земљине теже, цртањем тангенте на графику са слике 3.12 у тачки где је  $t = 3s$ , се добија  $g = -9,6m/s^2$ . Убрзање је све време кретања усмерено ка доле и на основу коефицијента правца тангенте се види да не зависи од смера кретања тела.

Једна од параболо са графика  $x(t)$  се може аналитички анализирати. Нека то буде парабола коју лопта прави током свог петог одскока, што одговара временском интервалу од  $t_1 = 3,86s$  до  $t_2 = 4,22s$ . Аналитички облик параболо представља квадратна функција

облика  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Узимајући у обзир факторизацију квадратног тринома, претходна релација добија облик

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3.9)$$

Нека се за референтни ниво узме висина од 0,282 m (висина коју има врх лопте, чија путања је снимљена).



Слика 3.14. Проучавање параболе

Узимајући у обзир претходну релацију, за случај са слике се може писати:

$$x = a(t - t_1)(t - t_2) = a(t - 3,86)(t - 4,22) = a(t^2 - 8,08t + 16,2892) \quad (3.10)$$

$$a = \frac{x}{t^2 - 8,08t + 16,2892} \quad (3.11)$$

Да би се одредио коефицијент  $a$  потребно је узети било коју тачку параболе. Нека то буде највиша тачка (4.02s, 0.158m). Вредност од 0.158 m се добија узимајући у обзир референтни ниво:  $x = 0.44m - 0.282m = 0.158m$ .

$$a = \frac{0,158}{4,02^2 - 8,08 \cdot 4,02 + 16,2892} = \frac{0,158}{-0,032} = -4,94 \frac{m}{s^2} \quad (3.12)$$

Једначина која описује параболу добија облик:

$$x = -4,94(t^2 - 8,08t + 16,2892) \quad (3.13)$$

Решење се може проверити убацивањем било које вредности  $t$ . За  $t = 4s$  се добија да је  $x = 0,1522m$ , што се веома добро слаже са графичком вредношћу:

$$t = 4s, x = 0,435m - 0,282m = 0,153m \quad (3.14)$$

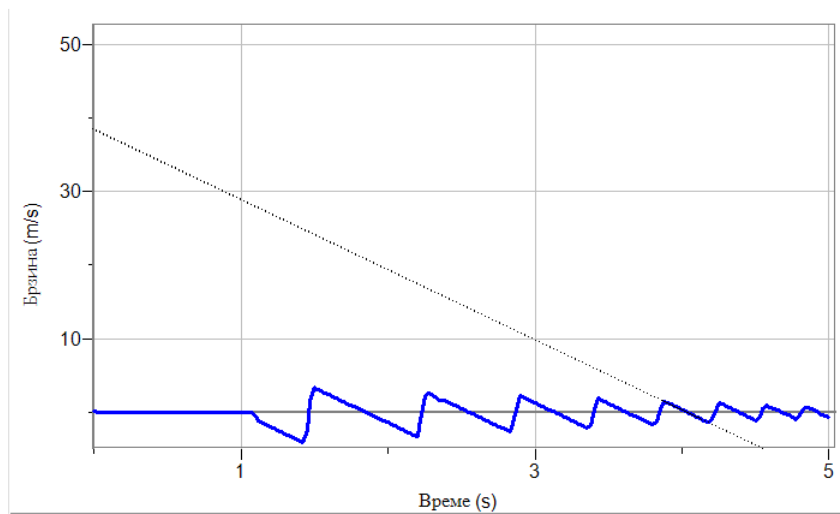
Диференцирањем претходног израза се добија:

$$\frac{dx}{dt} = -4,94(2t - 8,08), \quad (3.15)$$

где  $\frac{dx}{dt}$  представља брзину коју има лопта у тренутку  $t$ , одакле следи да се брзина у било ком тренутку мења по формули

$$v = -4,94(2t - 8,08) = -9,88t + 39,9 \quad (3.16)$$

Из ове релације следи да је зависност брзине од времена линеарна и да се може представити правом линијом на графику, што потврђује график  $v(t)$ :



Слика 3.15. Зависност брзине од времена при слободном паду лопте

Права на графику која одговара параболи која се проучавала, пресеца вертикалну осу у тачки где је  $v = 38,8 \frac{m}{s}$ , што је близу вредности одсечка на вертикалној осци од  $v = 39,9 \frac{m}{s}$  израчунате диференцирањем. За нулу функције се добија:

$$v = -9,88t + 39,9 = 0 \Rightarrow t = \frac{39,9}{9,88} = 4,04s, \quad (3.17)$$

што се види на графику  $v(t)$ . Претходни поступак диференцирања је карактеристичан за тражење екстрема функције, на основу чега се види да функција са графика  $x(t)$  има максимум у тачки где је  $t = 4,04s$ , при чему је  $v = 0 \frac{m}{s}$ . Одавде следи да се тело у највишој тачки путање зауставља и мења смер кретања јер брзина мења знак.

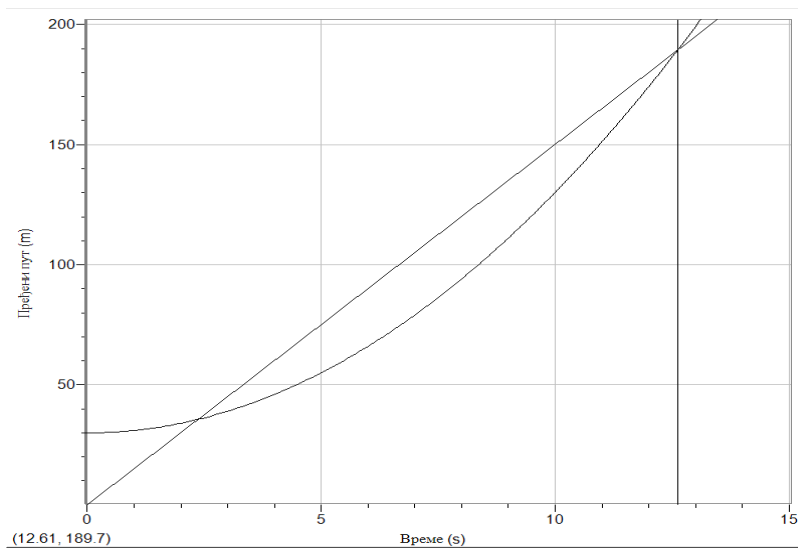
Диференцирањем претходног израза добија се убрзање лопте које је приближно једнако убрзању Земљине теже:



$$\frac{dv}{dt} = a = -9,88 \frac{m}{s^2} \quad (3.18)$$

Кинематика, која се у гимназијама изучава на почетку прве године, се великим делом заснива на познавању функција. Графичко представљање функција је веома битно у наставном процесу јер график представља мост између експерименталних резултата и апстрактних формула. Такође, график представља визуализацију одређених процеса, што доприноси бољем памћењу ученика.

Пример који је дат у поглављу 2.3 има своју графичку интерпретацију, те се може и на тај начин решити. Зависност пређеног пута од времена код камиона, који се креће константном брзином, је линеарна функција и може се представити правом на графику  $x(t)$ , док је зависност код аутомобила квадратна функција те се представља параболом. Уколико се координатни систем веже за положај камиона у тренутку када аутомобил започиње кретање, график зависности пређених путева од времена добија следећи облик:



Слика 3.16. Графичка интерпретација сусрета аутомобила и камиона

Са графика се може закључити да ће се камион и аутомобил два пута срести, када ће им после једнаког времена кретања пређени путеви бити исти. У конкретном случају, са графика следи да је брзина камиона једнака  $v_k = 15 \frac{m}{s}$ , да је почетно растојање  $30$  m, а убрзање аутомобила се може добити са било које тачке параболе. У тачки где је  $t = 5s$  је  $s = 55,2m$ , па важи:

$$55,2 = 30 + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow a = 2,016 \frac{m}{s^2} \approx 2 \frac{m}{s^2} \quad (3.19)$$

Са графика се види да ће по други пут доћи до сусрета после времена од  $12,61$  s, при чему камион пређе пут  $s_k = 189,7m$ . Ово се може проверити из услова:

$$v_k t = s_0 + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} t^2 - v_k t + s_0 = 0 \quad (3.20)$$

$$t^2 - 15t + 30 = 0 \quad (3.21)$$

Одавде је  $t_1 = 2,38s$ , а  $t_2 = 12,62s$ , а пређени пут камиона је  $s_k = v_k t = 189,3m$ , што се све јасно види на графику.

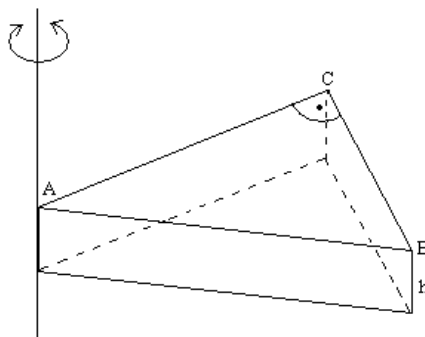
Посматрајући график може се закључити да ће до једног сусрета камиона и аутомобила доћи у случају када се на графику две функције секу у једној тачки, то јест уколико права на графику представља тангенту параболе, да до сусрета неће доћи уколико се функције не секу, и да ће се два пута срести уколико се функције секу у две тачке. Види се, такође, да за произвољно велику вредност брзине камиона и ма колико малу вредност убрзања аутомобила, мора доћи до њиховог сусрета, јер ће се ове две функције после неког времена негде пресећи.

Добро познавање појмова линеарних и квадратних функција може бити веома корисно при изучавању појава и законитости у настави физике. На жалост, и у овом случају долази до великог раскорака у програмима математике и физике јер се линеарне и квадратне функције на часовима математике изучавају тек у четвртном разреду гимназије.

### 3.3. Докази у геометрији помоћу механике

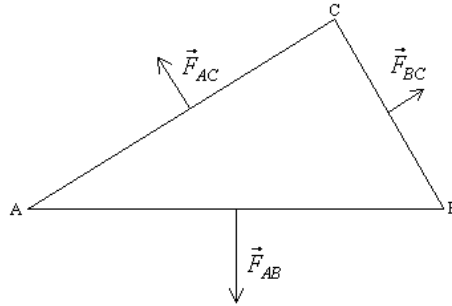
Питагорина теорема и обрасци за израчунавање елемената произвољног троугла се могу доказати помоћу образаца који се користе у механици. Извођење доказа за Питагорину теорему може послужити као пример на часу физике при изучавању момента силе у првом разреду гимназије. Пример за израчунавање елемената произвољног троугла се може урадити у другом разреду при изучавању појма притиска гаса, при чему ученици користе знање тригонометријских функција оштрог угла које су радили на крају прве године на часовима математике. Исти пример се може урадити и на часу математике у другом разреду гимназије при изучавању примене тригонометрије.

На слици 3.17 је дата призма чију основу гради правоугли троугао ABC. Висина призме је  $h$ .



Слика 3.17. Призма испуњена гасом под притиском  $p$

Нека је призма испуњена гасом под притиском  $p$ . Гас врши једнак притисак на све површине призме и делује одређеним силама на њих. Пошто је притисак дефинисан као сила која делује по јединици површине ( $p = \frac{F}{S}$ ), због једнаких површина и међусобне супротне усмерености, силе које делују на основе призме се поништавају. Остају силе које делују на омотач призме. [17]



Слика 3.18. Силе које делују на омотач призме

Момент појединих сила око тачке А дат је релацијама:

$$M_{AB} = F_{AB} \cdot \frac{AB}{2}, \quad M_{AC} = F_{AC} \cdot \frac{AC}{2}, \quad M_{BC} = F_{BC} \cdot \frac{BC}{2} \quad (3.22)$$

Уколико резултујући момент сила које делују на призму није једнак нули, призма ће вршити ротационо кретање. Ово није могуће због закона одржања енергије, тако да резултујући момент сила мора бити једнак нули, одакле следи:

$$M_{AB} = M_{AC} + M_{BC} \quad (3.23)$$

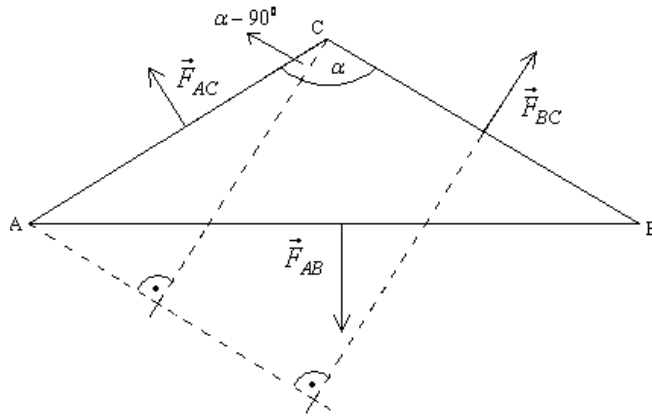
$$F_{AB} \cdot \frac{AB}{2} = F_{AC} \cdot \frac{AC}{2} + F_{BC} \cdot \frac{BC}{2} \quad (3.24)$$

Пошто је  $F_{AB} = p \cdot h \cdot AB$ ,  $F_{AC} = p \cdot h \cdot AC$ ,  $F_{BC} = p \cdot h \cdot BC$ , добија се образац за Питагорину теорему:

$$p \cdot h \cdot \frac{(AB)^2}{2} = p \cdot h \cdot \frac{(AC)^2}{2} + p \cdot h \cdot \frac{(BC)^2}{2} \quad (3.25)$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \quad (3.26)$$

У случају да троугао није правоугли, мења се крак силе, као што је то приказано на слици 3.19.



Слика 3.19. Момент сила око тачке А

Из услова равнотеже момената око тачке А следи:

$$F_{AB} \cdot \frac{AB}{2} = F_{AC} \cdot \frac{AC}{2} + F_{BC} \cdot \left( \frac{BC}{2} + AC \sin(\alpha - 90^\circ) \right) \quad (3.27)$$

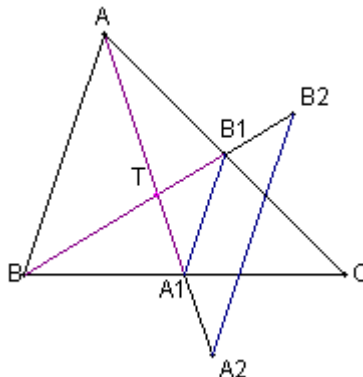
Пошто је  $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$ , а  $F_{AB} = p \cdot h \cdot AB$ ,  $F_{AC} = p \cdot h \cdot AC$ ,  $F_{BC} = p \cdot h \cdot BC$ , претходна једначина добија облик:

$$p \cdot h \cdot \frac{(AB)^2}{2} = p \cdot h \cdot \frac{(AC)^2}{2} + p \cdot h \cdot BC \cdot \left( \frac{BC}{2} + AC \sin(\alpha - 90^\circ) \right) \quad (3.28)$$

Одавде се, после поделе једначине са  $\frac{p \cdot h}{2}$ , добија образац за израчунавање непознате стране троугла, у случају када су познате две стране и захваћени угао:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - AC \cdot BC \cdot \cos \alpha \quad (3.29)$$

Коришћење закона статике може послужити као доказ да се тежишне линије троугла секу у једној тачки, тежишту троугла, при чему су том тачком подељене у односу 1:2. [14]



Слика 3.20. Тежиште троугла

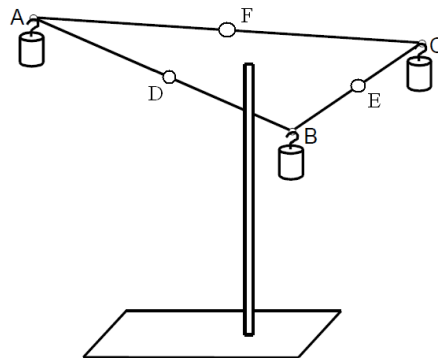
Математички доказ је следећи: Нека је ABC произвољан троугао (слика 3.20). Са  $A_1$  је означено средиште стране BC, са  $B_1$  средиште стране AC и са T пресек тежишних дужи  $BB_1$  и  $AA_1$ . Нека је  $B_2$  тачка на правој одређеној тачкама B и  $B_1$ , таква да

важи  $TB_1 = V_1B_2$ , а нека је  $A_2$  тачка на правој одређеној тачкама  $A$  и  $A_1$ , таква да важи  $TA_1 = A_1A_2$ . Дуж  $A_1B_1$  је средња линија у троуглу  $ABC$  и одговара основици  $AB$ , то јест паралелна јеса њом и њена дужина је једнака  $AB/2$ . Истовремено, она је средња линија и у троуглу  $TB_2A_2$ , тако да је она паралелна и са  $B_2A_2$  и њена дужина је једнака  $B_2A_2/2$ . Троуглови  $ABT$  и  $A_2B_2T$  су подударни јер су странице  $AB$  и  $A_2B_2$  подударне и паралелне, као и углови  $ABT$  и  $A_2B_2T$  и  $BAT$  и  $B_2A_2T$ , јер су то углови са паралелним крацима. Из подударности троуглова следи да је дуж  $BT$  подударна дужи  $TB_2$ . Како је  $TB_1$  једнака половини дужи  $TB_2$ , следи да је  $TB_1$  једнака половини дужи  $BT$ . Исти поступак доказује да је дуж  $TA_1$  једнака половини дужи  $AT$ . Одавде следи да тачка  $T$  дели дужи  $BB_1$  и  $AA_1$  у односу  $2:1$ . На исти начин се доказује и да тачка која је пресек тежишне дужи  $BB_1$  и тежишне дужи која одговара темену  $C$  дели  $BB_1$  у односу  $2:1$ , па та тачка мора да се поклапа са тачком која већ дели  $BB_1$  у том односу, то јест тачком  $T$ . Све три тежишне дужи се онда секу у тачки  $T$ , а део тежишне дужи од темена до тежишта је дупло дужи него део од тежишта до средишта наспрамне странице.

У доказивању на часу физике се могу користити следећи закони статике:

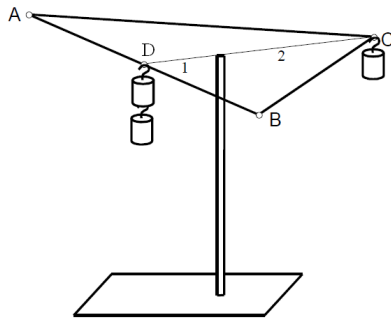
- за сваки систем тела постоји само један центар масе,
- центар масе два тела се налази између тела, на линији која их спаја, на растојању обрнуто пропорционалном масама тела,
- принцип супституције: при решавању проблема, било које две масе се могу заменити сумом тих двеју маса која се налази на месту њиховог центра масе.

Нека се у теменима троугла, у тачкама  $A$ ,  $B$  и  $C$  налазе тела једнаких маса, која су повезана лаким штаповима.



Слика 3.21. Троугао са једнаким масама у теменима

Пошто су масе једнаке, центри маса било која два тела се налазе на половини међусобног растојања, односно у тачкама  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Уколико се посматра центар маса тела која се налазе у тачкама  $A$  и  $B$  и маса у тачки  $C$ , применом закона статике може се закључити да се центар масе, односно тежиште овог система налази на правој која спаја центар масе тела у тачкама  $A$  и  $B$  (тачка  $D$ ) са масом у тачки  $C$ , на растојању које је обрнуто пропорционално њиховим масама. Права представља тежишну линију троугла. Одавде следи да је тежишна линија троугла подељена у односу  $1:2$ , што се јасно види на слици 3.22.

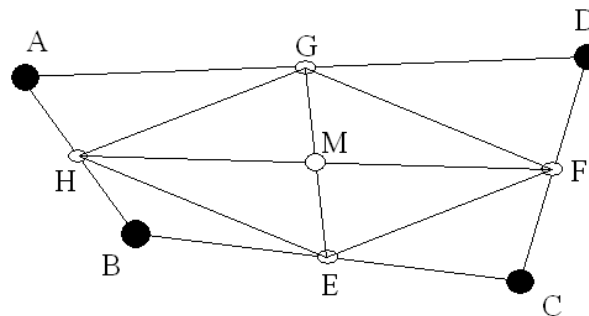


Слика 3.22. Тежишна линија троугла

Оваква конструкција се може применити у тачкама Е и F, при чему ће се добити исти резултат. Тежишне линије ће се сећи у једној тачки, тежишту троугла, и свака линија ће бити подељена у односу 2:1, посматрајући од темена троугла. [15]

Овакви докази су убедљиви јер нису апстрактни већ су очигледни и логични, те су лаки за разумевање чак и оним ученицима који не разумеју довољно математику, с обзиром да могу да виде да се троугао налази у равнотежи када се придржава у тежишној тачки.

Према Варињоновој теорему линије које спајају средишта страна произвољног четвороугла формирају паралелограм. [14] На слици 3.23 је дат четвороугао ABCD.



Слика 3.23. Варињонова теорема

Тачке Е, F, G и H представљају средишта страница овог четвороугла. Нека се у теменима четвороугла налазе четири тела једнаких маса, повезана лаким штаповима. Центар масе тела која се налазе у тачкама А и В се налази на половини међусобног растојања, у тачки Н, док се центар масе тела која се налазе у тачкама С и D налази у тачки F. Центар масе целог система се, према томе, налази у тачки М, која се мора налазити на средини међусобног растојања тачака Н и F. На исти начин, уколико се посматра центар масе кога чине тела и тачкама А и D (налази се у тачки G) и В и С (налази се у тачки E), добија се да се центар масе опет налази у тачки М. Одавде следи да тачка М пресеца дужи HF и GE на пола. Према томе, EFGH представља паралелограм чије су дијагонале HF и GE.

Интуитивно, делује доста чудно да било који четвороугао, ма колико био неправилан, садржи у себи тако велику правилност. Када се, међутим, четвороугао посматра као систем од четири тела једнаких маса, спојених лаким штаповима, постаје јасно да његов центар масе мора делити на једнаке делове штапове који повезују тачке које се налазе на средини међусобног растојања ових тела.

### 3.4. Детерминанте

У првом полугодишту трећег разреда гимназије ученици на часу математике у оквиру наставне теме „Вектори“ изучавају детерминанте другог и трећег реда, као и детерминанте и системе једначина. На часовима физике се у то време изучава наставна тема „Наизменична струја“. При изучавању наизменичне струје прави се паралела са једносмерном струјом која се изучавала у другом разреду гимназије. Овакво подударане програма математике и физике пружа прилику да се на часу математике у оквиру наставне јединице „Детерминанте и системи једначина“ као пример уради задатак везан за Кирхофова правила, који ће ученицима уједно бити добар подсетник за час физике.

Прво Кирхофово правило успоставља везу између јачина струја у гранама једног чвора. Оно гласи: Алгебарски збир јачина електричних струја у сваком чвору електричног кола једнак је нули:

$$\sum I = 0 \quad (3.30)$$

Уобичајено је да јачине струја које улазе у чвор имају позитиван предзнак, а оне које излазе из чвора негативан предзнак.

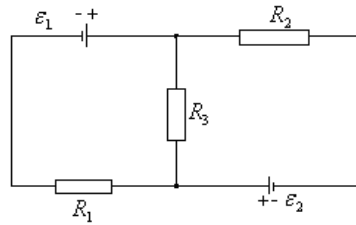
Друго Кирхофово правило се односи на струјну контуру, односно на свако неразгранато али затворено струјно коло од којих се састоји сложено, разгранато електрично струјно коло: У свакој контури разгранатог кола алгебарски збир свих електромоторних сила у тој контури једнак је алгебарском збиру електричних напона на свим отпорницима (потрошачима) у истој контури:

$$\sum \mathcal{E} = \sum RI \quad (3.31)$$

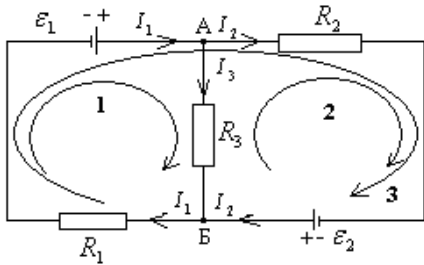
У сложеном колу се одабере онолико контура колико је потребно да би се свака грана обухватила. Потом се произвољно одређује смер протицања електричне струје у контурама. Затим се означи смер електричних струја у свакој грани, опет релативно произвољно јер унапред није могуће увек то урадити прецизно. Овај недостатак ће бити отклоњен у коначном решењу. Наиме, негативан предзнак за вредност јачине електричне струје значи да је њен смер супротан ономе који јој је претходно приписан. Ако се са једне стране једнакости пишу све електромоторне силе, а са друге производ  $IR$ , онда уколико се означен смер струје поклапа са смером обиласка контуре у тој грани, при писању једначина напону се приписује знак плус. Ако је супротан, онда знак минус. Аналогно се ради и за електромоторне силе: електромоторна сила се узима са ознаком плус ако се смером обиласка контуре „иде“ од негативног ка позитивном полу.

На часу математике је могуће урадити следећи задатак:

*Одредити јачине струја кроз сваку грану кола на слици, користећи Крамерово правило, ако су дате вредности:  $\mathcal{E}_1 = 1.5V$ ,  $\mathcal{E}_2 = 9V$ ,  $R_1 = 20\Omega$ ,  $R_2 = 30\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ . Унутрашњи отпори извора су занемарљиви.*



Слика 3.24. Струјно коло



Слика 3.25. Примена Кирхофових правила на струјно коло

Решење:

За чвор у тачки А важи:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (3.32)$$

Из контуре 1 и 2 следи:

$$\varepsilon_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (3.34)$$

Систем од три линеарне једначине се може решити Крамеровим правилом. Педагошки је једначине записати једну испод друге и прегруписати:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = \varepsilon_2$$

Прво је потребно одредити детерминанту система,  $D_I$ . Користећи Сарусово правило добија се:

$$D_I = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{vmatrix} = -R_1 R_2 - R_3 R_2 - R_3 R_1 \quad (3.35)$$

Детерминанте  $D_{I_1}$ ,  $D_{I_2}$  и  $D_{I_3}$  се добијају тако што се чланови који иду уз  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  замене слободним члановима 0,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ :

$$D_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \varepsilon_1 & 0 & R_3 \\ \varepsilon_2 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & R_2 \end{vmatrix} = -R_3 \varepsilon_2 - R_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 R_3 \quad (3.36)$$



$$D_{I_2} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ R_1 & \varepsilon_1 & R_3 & R_1 \varepsilon_1 & -R_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_2 R_3 \\ 0 & \varepsilon_2 & -R_3 & 0 & \varepsilon_2 \end{array} \right| \quad (3.37)$$

$$D_{I_3} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & \varepsilon_1 & R_1 0 & -\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1 \\ 0 & R_2 & \varepsilon_2 & 0 & R_2 \end{array} \right| \quad (3.38)$$

Јачине струја се добијају из следећих релација:

$$I_1 = \frac{D_{I_1}}{D_I}, \quad I_2 = \frac{D_{I_2}}{D_I}, \quad I_3 = \frac{D_{I_3}}{D_I} \quad (3.39)$$

$$I_1 = \frac{-R_3 \varepsilon_2 - R_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 R_3}{-R_1 R_2 - R_3 R_2 - R_3 R_1} = \frac{R_3 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1} = 136,4 \text{mA} \quad (3.40)$$

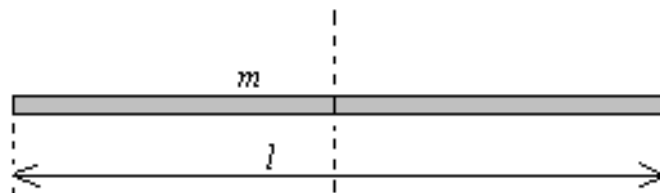
$$I_2 = \frac{-R_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_2 R_3}{-R_1 R_2 - R_3 R_2 - R_3 R_1} = \frac{R_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1} = 259,1 \text{mA} \quad (3.41)$$

$$I_3 = \frac{-\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{-R_1 R_2 - R_3 R_2 - R_3 R_1} = \frac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1} = -122,7 \text{mA} \quad (3.42)$$

Негативан знак јачине струје  $I_3$  значи да је њен смер супротан ономе који је претпостављен и који јој је приписан.

### 3.5. Примена граничне вредности низа и интегралног рачуна у физици

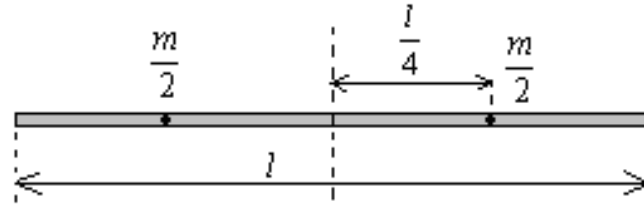
Гранична вредност низа и интегрални рачун имају велику примену у физици, те је пожељно при изучавању ових области у математици то радити на конкретним примерима из физике. Ово се може веома лепо показати на примеру момента инерције штапа који ротира око осе која пролази кроз центар масе штапа или пак кроз било коју тачку на штапу.



Слика 3.26. Момент инерције штапа

У првом разреду гимназије је дат само коначан образац за момент инерције штапа у односу на осу која пролази кроз центар штапа (централна оса)  $I = \frac{1}{12}ml^2$ , где је  $m$  маса штапа а  $l$  дужина штапа. Ово оставља довољно простора да се познајући момент инерције материјалне тачке  $I = mr^2$ , где је  $r$  удаљеност тачке од осе ротације, изведе претходна формула за момент инерције штапа, прво уз помоћ примене граничне вредности низа, а потом и применом интегралног рачуна. Гранична вредност функције се ради у првом полугодишту, а интегрални рачун у другом полугодишту четвртог разреда гимназије.

Уколико оса ротације пролази кроз тежиште штапа, морају се посматрати тачке које се крећу око центра ротације, па према томе не може се посматрати као да се целокупна маса налази на средини штапа. Међутим, штап се може поделити на два дела, при чему се добијају две тачке које представљају центре маса ова два дела које се налазе на удаљености  $\frac{l}{4}$  од центра масе штапа:

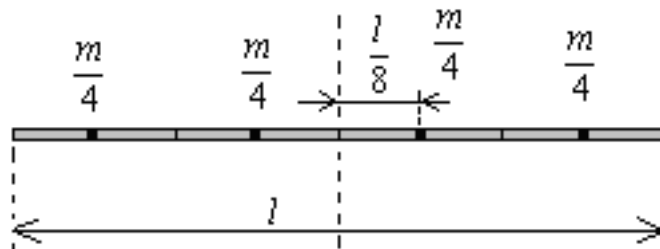


Слика 3.27. Подела штапа на два дела

Момент инерције ове две тачке износи:

$$I_1 = \frac{m}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} ml^2 = 0,0625 ml^2 \quad (3.43)$$

Ова апроксимација, наравно, није добра јер се уместо момента инерције свих тачака узео у обзир момент инерције само две тачке. Боља апроксимација се постиже уколико се уместо на два дела штап подели на 4 дела:



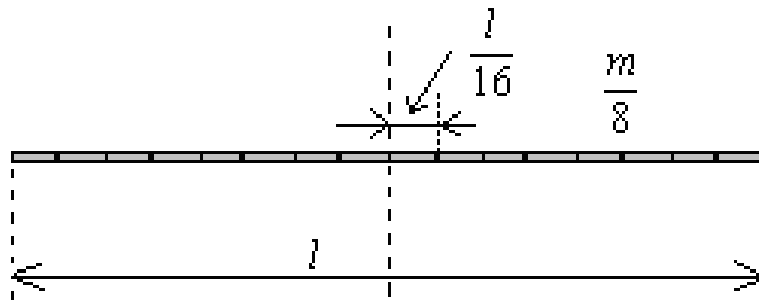
Слика 3.28. Подела штапа на четири дела

У овом случају се за момент инерције четири тачке добија:

$$I_2 = \frac{m}{4} \left( \frac{l}{8} \right)^2 + \frac{m}{4} \left( \frac{3l}{8} \right)^2 + \frac{m}{4} \left( \frac{l}{8} \right)^2 + \frac{m}{4} \left( \frac{3l}{8} \right)^2 = \frac{5}{64} ml^2 = 0,078 ml^2 \quad (3.44)$$

Овај резултат је бољи од претходног јер је вредност која је добијена ближа правој вредности момента инерције  $I = \frac{1}{12} ml^2 = 0,08333 ml^2$ .

Даље, уколико се штап подели на 8 једнаких делова, за момент инерције се добија:



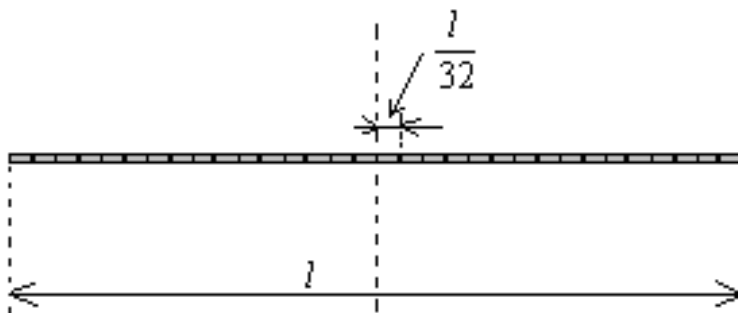
Слика 3.29. Подела штапа на осам делова

$$I_3 = \frac{m}{8} \left( \frac{l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{3l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{5l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{7l}{16} \right)^2 +$$

$$+ \frac{m}{8} \left( \frac{l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{3l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{5l}{16} \right)^2 + \frac{m}{8} \left( \frac{7l}{16} \right)^2$$

$$I_3 = \frac{21}{16^2} ml^2 = 0,082 ml^2 \quad (3.45)$$

Даља подела даје још прецизнији резултат:



Слика 3.30. Подела штапа на шеснаест делова

$$I_4 = \frac{m}{16} \left( \frac{l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{3l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{5l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{7l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{9l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{11l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{13l}{32} \right)^2 +$$

$$+ \frac{m}{16} \left( \frac{15l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{3l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{5l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{7l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{9l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{11l}{32} \right)^2 +$$

$$+ \frac{m}{16} \left( \frac{13l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{15l}{32} \right)^2$$

$$I_4 = \frac{85}{32^2} ml^2 = 0,0830 ml^2 \quad (3.46)$$

Одавде је

$$I_1 = 2 \frac{ml^2}{2} \frac{1}{4^2} (1^2) \quad (3.47)$$

$$I_2 = 2 \frac{ml^2}{4} \frac{1}{8^2} (1^2 + 3^2) \quad (3.48)$$

$$I_3 = 2 \frac{ml^2}{8} \frac{1}{16^2} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) \quad (3.49)$$

$$I_4 = 2 \frac{ml^2}{16} \frac{1}{32^2} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2) \quad (3.50)$$

Да би се добила тачна вредност момента инерције мора се извршити подела на  $n$ -делова, где се из претходних примера јасно види да следи:

$$I_k = 2 \frac{ml^2}{n} \frac{1}{(2n)^2} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (n-1)^2) \quad (3.51)$$

Где  $n$  показује на колико делова је штап подељен, а  $I_k$  - укупан момент инерције  $n$  материјалних тачака укупне масе  $m$ .

Низ квадрата је дат изразом:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.52)$$

Пошто је потребно заменити низ квадрата непарних бројева, од низа квадрата целих бројева је потребно одузети низ квадрата парних бројева:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2 = 2^2 \cdot \left( 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \left( \frac{n}{2} \right)^2 \right) = 2^2 \cdot \frac{\frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \left( 2 \frac{n}{2} + 1 \right)}{6} = \frac{n \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (n+1)}{3}$$

(3.53)

Из претходног следи:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (n-1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6} = \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 2n\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n^2-1)}{6} \\
 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (n-1)^2 &= \frac{n(n^2-1)}{6} \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

Када се ово уврсти у израз за момент инерције добија се:

$$I_k = 2 \frac{ml^2}{n} \frac{1}{(2n)^2} \frac{n(n^2-1)}{6} = \frac{1}{12} ml^2 \frac{n^2-1}{n^2} \tag{3.55}$$

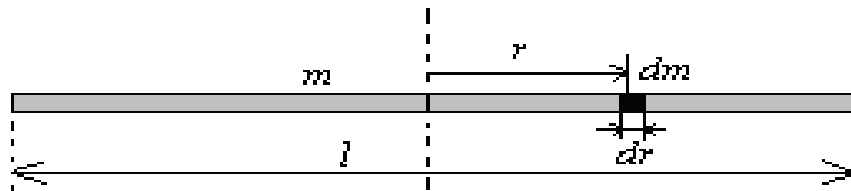
У граничном случају, када број делова на које се штап дели тежи бесконачности, добија се израз за момент инерције штапа који је у уџбенику за први разред гимназије дат само као коначан израз, без извођења:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1 \tag{3.56}$$

$$I_k = \frac{1}{12} ml^2 \tag{3.57}$$

Исти задатак може послужити као пример у четвртом разреду гимназије приликом обраде наставне јединице „Одређени интеграл“. У овом случају, до решења се долази знатно брже, што би требало да буде добра демонстрација моћи интегралног рачуна.

Посматра се момент инерције елементарне масе  $dm$  инфинитезимално малог дела штапа дужине  $dr$  која се налази на растојању  $r$  од центра ротације штапа:



Слика 3.31. Интегрална метода рачунања момента инерције штапа

Елементарни момент инерције дат је изразом:

$$dI = r^2 dm \tag{3.58}$$

Пошто је запреминска маса дефинисана као  $dm = \rho dV$ , претходни израз може да се запише у облику:

$$dI = \rho r^2 dV = \rho S r^2 dr, \quad (3.59)$$

где је  $\rho$  густина а  $S$  површина попречног пресека штапа.

Момент инерције целог штапа се добија уколико се саберу моменти инерција свих елементарних маса, односно уколико се изврши интеграција свих елементарних момената дуж целог штапа:

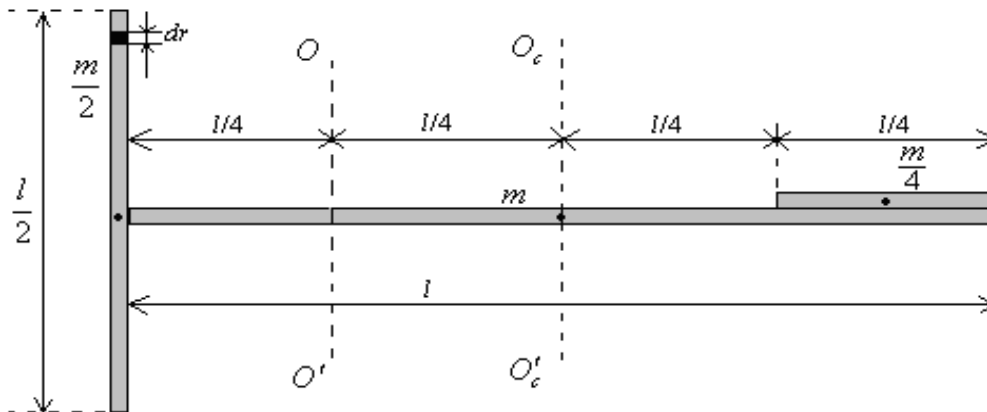
$$\int_0^{l_c} dI = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho S r^2 dr = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr \quad (3.60)$$

$$I|_0^{l_c} = \rho S \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$I_c = \frac{\rho S}{3} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^3 - \left( -\frac{l}{2} \right)^3 \right) = \frac{\rho S}{3} 2 \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} \rho S l^2 = \frac{1}{12} \rho V l^2$$

$$I_c = \frac{1}{12} m l^2 \quad (3.61)$$

Наведени поступак интеграције се може применити за одређивање момента инерције система кога чине више тела, у односу на произвољну осу ротације, а без примене Штајнеровог обрасца. На слици 3.32 је представљен систем од 3 танка штапа маса  $m$ ,  $m/2$  и  $m/4$ . Систем ротира око осе  $OO'$  која је у односу на осу која пролази кроз центар масе штапа дужине  $l$  померена за  $l/4$ .



Слика 3.32. Момент инерције система штапова

Укупан момент инерције се добија сабирањем момента инерције појединих делова система:

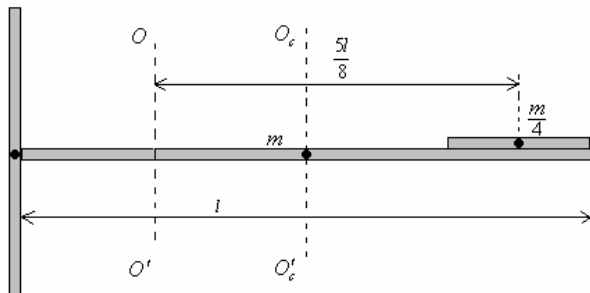
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{4}\right)^2 \rho S dr + \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} \rho S r^2 dr + \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} 2\rho S r^2 dr \\
(3.62) \\
I &= \rho S \frac{l^2}{16} r \Big|_0^{\frac{l}{2}} + \rho S \frac{r^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} + 2\rho S \frac{r^3}{3} \Big|_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} = \\
&= \rho S \frac{l^2}{16} \frac{l}{2} + \frac{\rho S}{3} \left[ \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{4}\right)^3 \right] + \frac{2\rho S}{3} \left[ \left(\frac{3l}{4}\right)^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^3 \right] = \\
&= \frac{ml^2}{32} + \frac{\rho S l}{3} l^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) + \frac{2\rho S l}{3} l^2 \left(\frac{27}{64} - \frac{1}{8}\right) = ml^2 \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{24} + \frac{1}{192} + \frac{54}{192} - \frac{2}{24}\right) \\
I &= 0,27604ml^2 \quad (3.63)
\end{aligned}$$

До истог решења је могуће доћи применом Штајнерове теореме за случај штапа дужине  $l$ :

$$I_l = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7ml^2}{48} \quad \text{- момент инерције штапа дужине } l \text{ у односу на осу } OO'$$

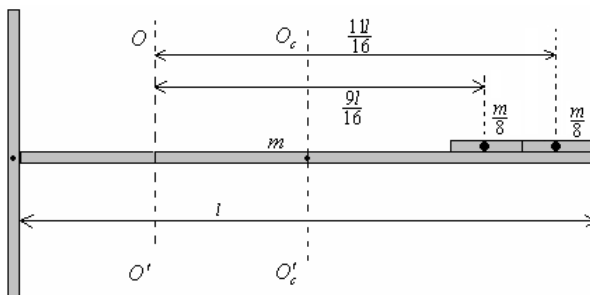
$$I_{\frac{l}{2}} = \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{ml^2}{32} \quad \text{- момент инерције штапа дужине } l/2 \text{ у односу на осу } OO'$$

Приближна вредност момента инерције штапа дужине  $l/4$  може се добити његовом поделом на више делова, при чему се посматра посебно момент сваког дела:



$$I_1 = \frac{m}{4} \left(\frac{5l}{8}\right)^2 = \frac{25ml^2}{256} \quad (3.64)$$

Слика 3.33. Момент инерције тачке масе  $m/4$



$$I_2 = \frac{m}{8} \left(\frac{9l}{16}\right)^2 + \frac{m}{8} \left(\frac{11l}{16}\right)^2 = \frac{101ml^2}{1024} \quad (3.65)$$

Слика 3.34. Момент инерције тачака маса  $m/8$

Аналогно, за момент инерције треће и четврте апроксимације се добија:

$$I_3 = \frac{m}{12} \left( \frac{13l}{24} \right)^2 + \frac{m}{12} \left( \frac{15l}{24} \right)^2 + \frac{m}{12} \left( \frac{17l}{24} \right)^2 = \frac{683ml^2}{6912} \quad (3.66)$$

$$I_4 = \frac{m}{16} \left( \frac{17l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{19l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{21l}{32} \right)^2 + \frac{m}{16} \left( \frac{23l}{32} \right)^2 = \frac{405ml^2}{4096} \quad (3.67)$$

Уколико се упореде резултати добијени методом интеграције и методом примене Штајнерове теореме и апроксимације, запажа се готово истоветан резултат. Што је апроксимација боља, то јест што је број подела штапа већи, резултати су приближнији:

$I = 0,27604ml^2$  - резултат добијен методом интеграције

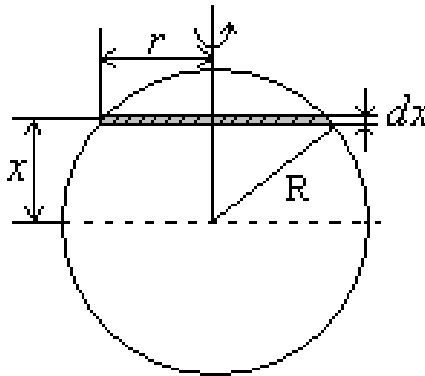
$$I_1 = \frac{7ml^2}{48} + \frac{ml^2}{32} + \frac{25ml^2}{256} = 0,27474ml^2 \quad (3.68)$$

$$I_2 = \frac{7ml^2}{48} + \frac{ml^2}{32} + \frac{101ml^2}{1024} = 0,27572ml^2 \quad (3.69)$$

$$I_3 = \frac{7ml^2}{48} + \frac{ml^2}{32} + \frac{683ml^2}{6912} = 0,27590ml^2 \quad (3.70)$$

$$I_4 = \frac{7ml^2}{48} + \frac{ml^2}{32} + \frac{405ml^2}{4096} = 0,27597ml^2 \quad (3.71)$$

Користећи интегрални рачун може се одредити момент инерције пуне хомогене лопте масе  $m$  и полупречника  $R$  која ротира око свог пречника. [3]



Слика 3.35. Момент инерције лопте

Посматра се слој дебљине  $dx$  и полупречника  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$  који се налази на удаљености  $x$  од средишта лопте. Запремина овог дела износи  $dV = r^2 \pi dx = \pi(R^2 - x^2) dx$ . Момент инерције овог танког ваљка износи:



$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \rho dV = \frac{1}{2} r^2 \rho r^2 \pi dx = \frac{1}{2} \rho r^4 \pi dx = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - x^2)^2 dx \quad (3.72)$$

Момент инерције полулопте се добија интеграцијом дуж целог полупречника лопте, док је момент инерције целе лопте једнак доприносу обе полулопте:

$$I = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - x^2)^2 dx = \rho \pi \left[ \int_0^R R^4 dx - \int_0^R 2R^2 x^2 dx + \int_0^R x^4 dx \right] \quad (3.73)$$

$$I = \rho \pi \left[ R^4 \cdot x \Big|_0^R - 2R^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^R + \frac{x^5}{5} \Big|_0^R \right] = \rho \pi \left[ R^4 \cdot R - 2R^2 \frac{R^3}{3} + \frac{R^5}{5} \right] =$$

$$= \rho \pi \frac{15R^5 - 10R^5 + 3R^5}{15} = \rho \pi \frac{8R^5}{15} = \rho \pi \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} R^3 \cdot R^2 = \rho V \frac{2}{5} R^2$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (3.74)$$

Предност оваквих примера у односу на стандардне примере (наћи граничну вредност односно интеграл датог низа, функције...) је у томе што се ученици срећу са већ познатим примером из физике, при чему се јасно види практична примена наизглед апстрактног математичког апарата.

## 4. Закључак

Математика и физика су се у средњој школи временом исувише удаљиле. Настава математике не прати у довољној мери наставу физике због чега долази до потешкоћа у савлађивању појмова и појава у физици. Рад представља покушај да се покаже како је интегрисани приступ, у одређеној мери, могуће остварити. Интегрисани приступ би довео до повећања квалитета знања, јер би се одређени проблеми изучавали коришћењем знања и физике и математике. Самим тим појава која се изучава би се сагледала из више различитих углова. У раду су дати примери који се обрађују у физици, а који би могли бити веома корисни у настави математике, јер би ученици изучавали нове појмове на познатим примерима, што би уједно било веома корисно и за наставу физике, јер би се на тај начин боље утврдило градиво. У настави физике, са друге стране, се може посветити више пажње појмовима који се изучавају на часовима математике, као што је то случај са линеарним и квадратним функцијама. Иако је анализа графика веома битна у настави физике, чини се да јој се посвећује премало пажње. Интегрисани приступ дозвољава могућност да се проблемска ситуација постави на часу физике, при чему се могу дефинисати одређене законитости које важе, а затим се проблем анализира на часу математике. Овакав приступ несумњиво има велики утицај на квалитет наставног процеса и знања ученика, иако понекад постоји одређена временска дистанца у проучавању неких законитости на часовима ова два предмета.

## 5. Литература

1. Вујичић Божидар, Ђуровић Стевица, Астрофизика са астрономијом – одабрана поглавља, Природно-математички факултет у Новом Саду, Нови Сад, 1995
2. Вучић инж. Властимир М, Ивановић др инж. Драгиша М, Физика I, Научна књига, Београд 1988
3. Мушицки Ђорђе, Увод у теоријску физику I – теоријска механика, Издавачко-информативни центар студената, Београд, 1975
4. Распоповић Милан О, Методика наставе физике, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1992
5. Распоповић Милан О, Физика за први разред гимназије, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2008
6. Распоповић Милан О, Јован Шетрајчић П, Распоповић Зоран М, Физика за други разред гимназије природно-математичког смера, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2008
7. Чалуковић Наташа, Физика 1 – збирка задатака и тестова за I разред гимназије, Круг, Београд, 2009
8. Andreas Quale, On the Role of Mathematics in Physics: A Constructivist Epistemic Perspective, *Sci&Educ* **20**, Numbers 7-8 (2010)609-624, DOI: 10.1007/s11191-010-9257-8
9. Andreas Quale, On the Role of Mathematics in Physics, *Sci&Educ*, **20**, 3-4, (2011) 359-372, DOI: 10.1007/s11191-010-9278-3
10. Anna Watson, Panayotis Spyrou, David Tall, The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector, *Mediterranean Journal of Mathematics Education*, Vol. I, (2002)
11. Anne Cherian, Mathematics through the Eyes of Physics, Overbrook High School Contents (2008)
12. Claus Michelsen, Functions: a modeling tool in mathematics and science, *ZDM* **38** (3) (2006) 269-280
13. Edward F. Redish, Problem solving and the use of math in physics courses, *Invited talk presented at the conference, World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change, Delhi, August 21-26, 2005. To be published in the proceedings*
14. Gila Hanna, Hans Niels Jahnke, Another approach to proof: Arguments from physics, *ZDM* **34** (1) (2002)1-8
15. Gila Hanna, Ysbrand de Bruyn, Nathan Sidoli, Dennis Lomas: Teaching proof in the context of physics, *ZDM* **36**(3) (2004)82-90
16. Mauricio Pietrocola, Mathematics as structural language of physical thought, The Science Teaching Center, **Science Education Seminar Wiki**, Department of Education, Curriculum & Instruction, University of Maryland, College Park, MD, april 12 (2011)
17. Tadashi F. Tokieda Source: Mechanical Ideas in Geometry , *The American Mathematical Monthly*, **105**, No. 8 (1998) 697-703 Published by: Mathematical Association of America Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/2588986> Accessed: 22/03/2009 10:32

18. Tine Golež, Real-time experiments approach in kinematics using ComLab equipment, Proceedings of ComLab conference 2007, Computerised Laboratory in Science and Technology Education, November 30 - December 1, 2007, Radovljica, SLOVENIA (str.29)
19. V.A. Uspenskii, Some applications of mechanics to mathematics, Blaisdell publishing company, New York, (1961)

## Кратка биографија кандидата



Ненад Павловић, рођен 21.11.1985. године у Вршцу. Завршио основну школу „Душан Јерковић“ у Банатском Карловцу и гимназију „Борислав Петров Браца“ у Вршцу. Године 2004. уписао Природно–математички факултет у Новом Саду, смер професор физике, 2009. године уписао мастер студије.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

*Редни број:*

**РБР**

*Идентификациони број:*

**ИБР**

*Тип документације:*

Монографска документација

**ТД**

*Тип записа:*

Текстуални штампани материјал

**ТЗ**

*Врста рада:*

Дипломски – мастер рад

**ВР**

*Аутор:*

Ненад Павловић

**АУ**

*Ментор:*

др Душанка Обдовић, редовни проф.

**МН**

*Наслов рада:*

Интегрисани приступ настави физике и математике: одабрани примери за ученике гимназија

**НР**

*Језик публикације:*

српски (ћирилица)

**ЈП**

*Језик извода:*

Српски/енглески

**ЈИ**

*Земља публикавања:*

Република Србија

**ЗП**

*Уже географско подручје:*

Војводина

**УГП**

*Година:*

2011

**ГО**

*Издавач:*

Ауторски репринт

**ИЗ**

*Место и адреса:*

Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад

**МА**

*Физички опис рада:*

5/48/19/0/23/14/0

**ФО**

*Научна област:*

Физика

**НО**

*Научна дисциплина:*

Методика наставе физике

**НД**

*Предметна одредница/кључне речи:*

Интегрисани приступ, математика у физици, линеарне и квадратне функције, парабола, примена граничне вредности низа и интегралног рачуна

**ПО**

**УДК**

*Чува се:*

Библиотека департмана за физику, ПМФ-а у Новом Саду

**ЧУ**

*Важна напомена:*

Нема

**ВН**

*Извод:*

У раду је приказан интегрисан приступ настави физике и математике за ученике гимназија, у циљу бољег повезивања знања из ових области. Интегрисани приступ би довео до повећања квалитета знања, јер би се одређени проблеми изучавали коришћењем знања и физике и математике. Дати су примери који се могу користити у настави оба предмета.

**ИЗ**

*Датум прихватања теме од НН већа:*

17.08.2011.

**ДП**

*Датум одбране:*

30.08.2011.

**ДО**

*Чланови комисије:*

**КО**

*Председник:*

др Дарко Капор, редовни проф.

*члан:*

др Срђан Ракић, редовни проф.

*члан:*

др Душанка Обадовић, редовни проф.

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

*Accession number:*

**ANO**

*Identification number:*

**INO**

*Document type:*

Monograph publication

**DT**

*Type of record:*

Textual printed material

**TR**

*Content code:*

Final paper

**CC**

*Author:*

Nenad Pavlović

**AU**

*Mentor/comentor:*

Ph.D. Dušanka Obadović, full prof.

**MN**

*Title:*

Integrated approach in teaching physics and mathematics: selected examples for Grammar School students

**TI**

*Language of text:*

Serbian (Cyrillic)

**LT**

*Language of abstract:*

English

**LA**

*Country of publication:*

Republic of Serbia

**CP**

*Locality of publication:*

Vojvodina

**LP**

*Publication year:*

2011

**PY**

*Publisher:*

Author's reprint

**PU**

*Publication place:*

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

**PP**

*Physical description:*

5/48/19/0/23/14/0

**PD**

*Scientific field:*

Physics

**SF**

*Scientific discipline:*

Methodology of physics teaching

**SD**

*Subject/ Key words:*

Integrated approach, mathematics in physics, linear and quadratic functions, parabolas, the application of limit values array and integral calculus

**SKW**

**UC**

*Holding data:*

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

**HD**

*Note:*

None

**N**

*Abstract:*

This paper presents an integrated approach to teaching physics and mathematics for Grammar school students, in order to better connect knowledge in these areas. An integrated approach would lead to an increase in the quality of knowledge, because specific problems would be studied using knowledge of physics and mathematics. Examples of that has been given and can be used in teaching both subjects.

**AB**



*Accepted by the Scientific Board:* 17.08.2011.  
**ASB**  
*Defended on:* 30.08.2011.  
**DE**  
*Thesis defend board:*  
**DB**  
*President:* Ph.D. Darko Kapor, full prof.  
*Member:* Ph.D. Srđan Rakić, full prof.  
*Member:* Ph.D. Duřanka Obadović, full prof.