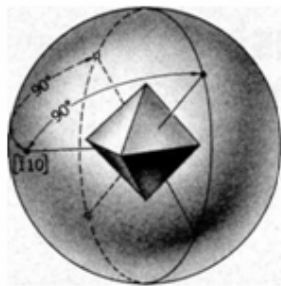


TIPOVI PROJEKCIJA

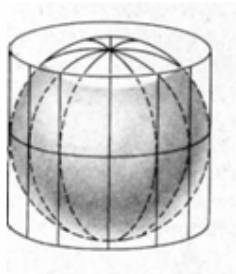
SFERNA PROJEKCIJA

Perspektivna projekcija, po definiciji, podrazumeva premeštanje tačaka, koje se posmatraju iz neke fiksne tačke prostora, na površinu. Pod projektovanjem se podrazumevaju određena pravila koja su vezana za spoljašnji izgled objekta, uglove i mnoge druge karakteristike prilikom projektovanja nekog objekta. U slučaju kristala, najpraktičniji način projektovanja kristala postiže se postavljanjem tačke perspektive tj. fiksne tačke, u centar kristala

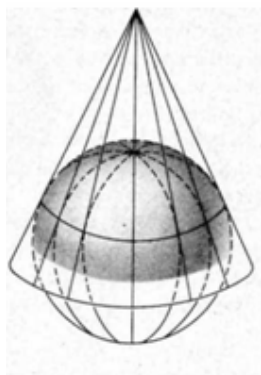


(centar kristala je tačka preseka kristalografskih osa), pri čemu se radijalne linije, koje prolaze kroz centar, usmeravaju ka spoljašnjosti kristala tako da budu normalne na ravan kristala, kao na slici. Pravac normale na ravan predstavlja orijentaciju te ravni, dok skup svih takvih normala predstavlja orijentaciju različitih ravni koje su projektovane. Tačke preseka normala sa sferom nazivamo *poles* (*polovi*), a skup svih tih tačaka čini *sfernu projekciju*.

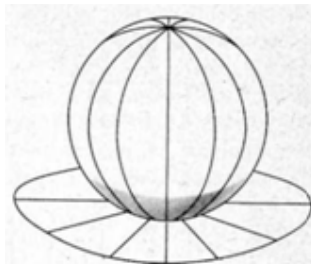
Kod sfere se mogu uočiti jednako raspoređeni *veliki krugovi* tj. *meridijani*, i mali *krugovi* tj. *parallels*. Prilikom projekcije sfere na ravan potrebno je istaći kojom površi će ta sfera biti obuhvaćena. Postoje tri načina da se obuhvati sfera, to su:



- *CILINDRIČNA PROJEKCIJA* je projekcija u kojoj površina projekcije okružuje sferu, u obliku je cilindra i dodiruje sferu po specijalnom velikom krugu kojeg nazivamo ekvator, kao na slici. Jedina prednost ove projekcije je ta što se paralele i meridijani projektuju kao međusobno normalne linije.



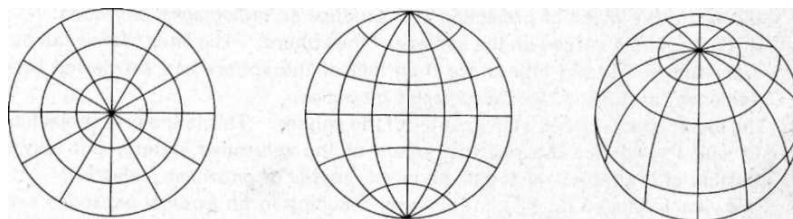
- *KONUSNA PROJEKCIJA* je projekcija u kojoj je površina projekcije oblika konusa koji dodiruje sferu na izabranom malom krugu tj. paraleli (taj krug je paralelan ekvatoru). Meridijane se pojavljuju kao ravne linije koje „zrači vrh konusa“, dok se paralele pojavljuju kao koncentrični krugovi oko vrha.



- *ZENITNA PROJEKCIJA* je projekcija u kojoj površina projekcije predstavlja tangencijalnu ravan sfere, kao na slici. Izgled meridijana i paralela je određen položajem tačke dodira tangente i sfere, kao i tačkom perspektive.

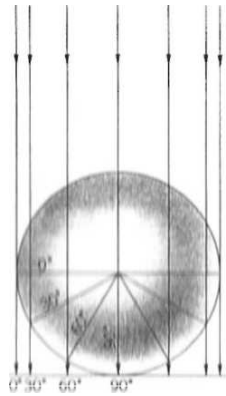
Postoje tri različite opcije koje su dostupne za odabir tačke dodira projekcione ravni i sfere, to su:

1. Jedna od dve tačke takozvanog geografskog pola, kao rezultat toga imamo *polarnu projekciju*.
2. Tačka koja leži na ekvatoru, kao rezultat toga je *meridijan projekcija*.
3. Bilo koja tačka samo da ne leži na geografskim polovima ili na ekvatoru, kao rezultat odabira ovakve tačke je *kosa projekcija*. Opšti izgled meridijana i paralela u sve tri vrste projekcija prikazan je ispod na slici.

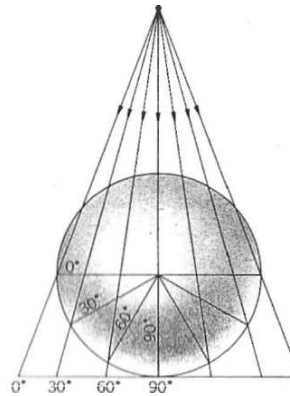


U zavisnosti od položaja tačke gledišta razlikujemo četiri vrste *zenitne projekcije*:

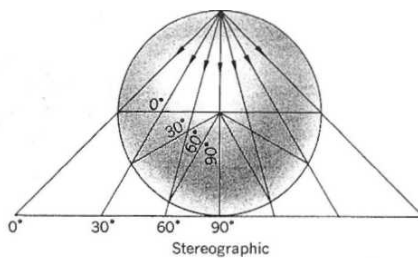
1. Tačka gledišta se nalazi u beskonačnosti, a linije gledišta su normalne na ravan projekcije, ovo je takozvana *ortografska projekcija (orthographic projection)*. (slika 1.)
2. Tačka gledišta se nalazi na površini sfere. Linije gledišta izlaze iz te tačke i malo više od polovine sfere se mogu videti, ovo je takozvana *stereografska projekcija (stereographic projection)*. (slika 2)
3. Tačka gledišta je smeštena u centru sfere. Ovu projekciju nazivamo *centralna ili gnomonic projection*, to je jedina projekcija u kojoj se ne koristi direktno cela sfera, već se samo deo pojavljuje na ravni. (slika 3.)
4. Tačka gledišta je smeštena van sfere, rezultat ovakvog položaja tačke gledišta je takozvana *spoljašnja projekcija (external projection)*. Pokazano je da se minimalna deformacija postiže kada se tačka gledišta pomeri od ravni oko 1,4 do 1,7 veličine prečnika, i u tom slučaju ovakvu projekciju nazivamo *Clarkes Minimum Error projection*. (slika 4.)



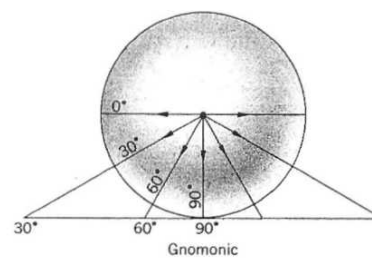
slika 1.



slika 4.



slika 2.



slika 3.

Ortografska i spoljašnja projekcija se slabo koriste u kristalografiji zbog ograničenosti ovih projekcija. Iako gnomonik projekcija mora biti ograničena na nepotpunom delu referentne sfere, ipak se često upotrebljava u kristalografiji. Kod ove projekcije značajna je osobina da svi veliki krugovi tj. meridijani nakon projekcije imaju oblik pravih linija. Treba napomenuti da se uglovi između ravni i njenih normala pravilno prikazuju na referentnoj sferi. Na osnovu ovoga proizilazi najznačajniji stav: da se prilikom perspektivne projekcije ugaoni odnosi zadržavaju bez izobličenja.

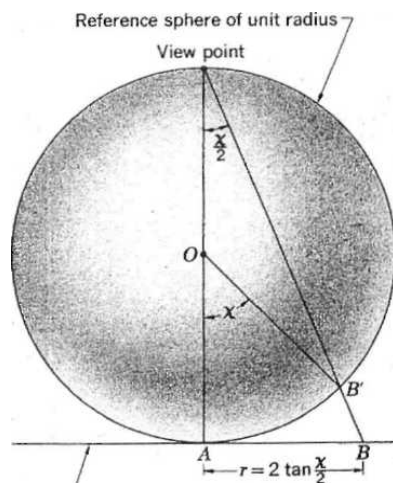
STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

POLARNA PROJEKCIJA

Pošto se tačka gledišta u stereografskoj projekciji nalazi direktno na referentnoj sferi, onda se stereografska polarna projekcija pojavljuje kao perspektivni pogled duž ose sever-jug. Kao i ranije, meridijani se pojavljuju kao radijalne prave linije dok su paralele u obliku krugova čiji se poluprečnici mogu odrediti uz pomoć trougla AOB' sa Slike 5.

Ugao $\angle AOB' = \chi$ je centralni ugao nad tetivom AB', a njemu odgovarajući periferni ugao iz tačke gledišta iznosi $\chi/2$. Ukoliko uzmemo da je poluprečnik referentne sfere $OA = 1$, dobijamo da je $r = AB = 2 \tan \frac{\chi}{2}$. Primetimo da ako je maksimalna vrednost centralnog ugla 90° , onda je maksimalna vrednost poluprečnika projekcije ekvatorijalnog kruga dva puta poluprečnik referentne sfere. Također primetimo da je ekvatorijalni krug granica stereografske polarne projekcije.

MERIDIJAN PROJEKCIJA-Moguće je konstruisati stereografsku projekciju postavljanjem tačke gledišta na ekvator, a zatim sprovesti postupak sa Slike 5. Međutim postoji i više direktnih postupaka, kao što je npr. korišćenje dve osobine kojima se pojačava stereografska projekcija, to su:



1. Svi uglovi na referentnoj sferi se pojavljuju kao pravi uglovi u projekciji.
2. Svi krugovi na sferi će se pojaviti kao takozvani „true circles“ u projekciji.

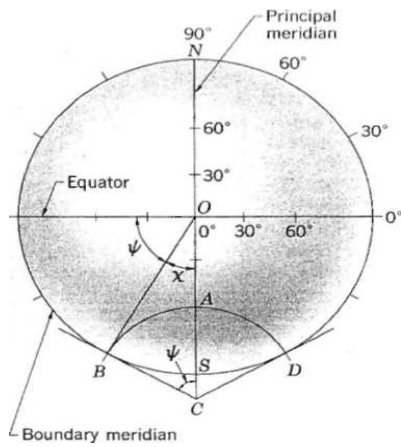
Ova svojstva se mogu upotrebiti na sledeći način: Prvo razgraničiti ugaone intervale oko granice meridijane, a zatim formirati obim projekcije, i duž ekvatora i glavne meridijane, koristeći izraz:

$$r = AB = 2 \tan \frac{\chi}{2}$$

Slike 5.

Dobijaju se tri tačke kroz koje moraju proći sve paralele i sve meridijane. Na osnovu osobine 2, u projekciji one će se pojaviti kao krugovi, ostaje da se pronađu njihovi centri duž glavne meridijane ili ekvatorijalne linije. Kako se meridijana i paralela seku pod pravim uglom u odnosu na sferu, onda na osnovu svojstva 1, projektovane paralele moraju seći granicu meridijane pod pravim uglom.

Na Slici 6. je prikazana paralela na 60° geografske širine. Budući da je paralelni krug normalan na granicu meridijane u tačkama B i D, tangente na granicu meridijane su BC i DC koje se seku u tački C na glavnoj meridijani.



Slika 6.

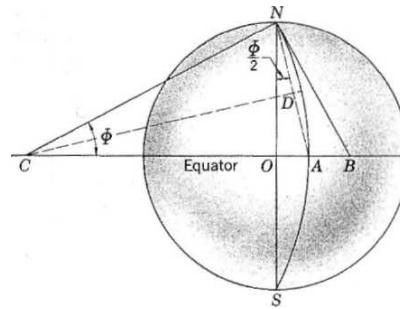


Fig. 2-10

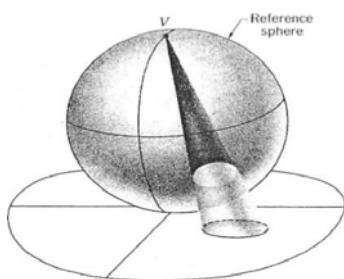
Slika 7.

Centar projekcije meridijana, mora ležati duž ekvatora. Lokacija njihovog lokusa se može odrediti uz pomoć slike 7. Kako su sve meridijane velike kružnice koje prolaze kroz dva geografska pola planete, i njihove projekcije moraju proći kroz dva pola sa oznakom N i S u projekciji (Slika 7). $CN = CA$ predstavlja poluprečnik kruga, čija se dužina može lako utvrditi. Najlakši način za utvrđivanje dužine poluprečnika je svakako grafički, slika 7.

Na osnovu $OA = \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$ sa slike 9, i u skladu sa relacijom da je $r = AB = 2 \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$ imamo da je ugao $\angle ONA = \frac{\Phi}{2}$. Također je NA normalno na CD, a iz jednakosti uglova

$\angle ONA = \angle DCO = \angle NCD = \frac{\Phi}{2}$, i na osnovu podatka da je ugao $\angle NCO = \Phi$, sledi da je ugao $\angle CNO = 90^\circ - \Phi$, a kako je to ugao koji formiraju radijus CN i glavna meridijana NS, onda je lokacija centra za bilo koju geografsku dužinu Φ jednostavna. Stereografska meridijanska projekcija meridijana i paralela se naziva „stereographic net“ ili „Wulff net“.

SVOJSTVA PROJEKCIJE-Dokaz da će se svi uglovi na referentnoj sferi pojaviti kao pravi uglovi u projekciji, dat je na slici 7. Tamo je pokazano da je ugao χ na sferi projektovan kao ugao $\chi/2$ u stereografskoj projekciji. Ovakve razmere se dozvoljavaju kada su uglovi između polova na sferi očuvani u projekciji.



Slika 8.

U uvodnom delu smo rekli da se prav ugao između dva pola na sferi može meriti samo uz veliki krug koji prolazi kroz oba pola, na osnovu ovoga sledi da se pravi uglovi u stereografskoj projekciji mogu meriti samo uz velike kružnice, što su u stvari svi meridijani i ekvator. Druga važna osobina stereografske projekcije jeste da će se svi krugovi na sferi pojaviti kao „true circles“ u projekciji, što se lako dokazuje s obzirom na mali krug na sferi sa slike 8. Svi krugovi na sferi formiraju ravni koje prolaze kroz sferu. Ako se seku ravni koje prolaze kroz centar sfere, onda te ravni seku sferu po velikom krugu, a sve ravni koje ne prolaze kroz centar sfere, seku tu sferu u malim

krugovima kao na slici 8.