УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕПАРТМАН ЗА
МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ

Топлотна проводљивост

СЕМИНАРСКИ РАД

Ментор: Студент: Ђорђе Вучковић

др Светлана Лукић Број индекса : 6/06

Нови Сад, април , 2010.

УВОД

Топлотна енергија може спонтано прелазити са једног на друго тело уколико постоји температурна разлика. При томе се једно тело загрева на рачун другог, што је праћено повишењем температуре хладнијег тела. Постоје три начина преношења топлоте : провођење , струјање (конвекција) и зрачење (радијација) .

Провођење топлоте је такав вид преношења топлотне енергије из тела у други део тела под утицајем градијента температуре и без знатнијег макроскопског померања честица. На пример, познато је да ће се у случају загревања једног краја металног штапа, топлота пренети и на остале делове штапа. Иако се овај вид преношења топлоте јавља у сва три агрегатна стања, ми ћемо се ограничити на испитивање топлотне проводљивости чврстих тела.

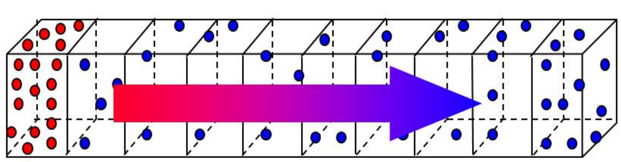
Квантитативну меру топлотне проводљивости материјала одражава коефицијент топлотне проводљивости (к) . Појављује се као коефицијент пропорционалности у класичном Фуријеовом закону (који важи за чврста тела) :

$$Q = -\kappa \, grad\, T\, S$$

Где је Q топлотни флукс, $grad\ T$ – температурни градијент, а S – површина тела. Ову једначину , у случају једнодимензионалног провођења (нпр. провођење топлоте у штапу, дугачкој шипки и сл.) можемо представити на следећи, једноставнији начин :

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\kappa S \frac{dt}{dx}$$

Израз са леве стране једначине је тренутни интензитет протока топлоте . Он је, дакле, пропорционалан температурном градијенту. Знак минус узет је због тога што је смер повишења температуре супротан смеру преношења топлоте провођењем (топлота спонтано преноси са тела више на тело ниже температуре) . Из класичног Фуријеовог закона провођења топлоте једноставно се изводи и јединица коефицијента топлотне проводљивости : то је, дакле, ват по метру по келвину ($Wm^{-1}K^{-1}$).



слика 1 – провођење топлоте

Класичан Фуријеов закон може се додатно упростити уколико је реч о стационарном провођењу топлоте, јер тада су температурни градијент и интензитет протока топлоте независни од времена.

Коефицијент топлотне проводљивости зависи од температуре ; за већину хомогених , чврстих тела ову зависност можемо сматрати линеарном и то у релативно широком распону температура :

$$\kappa = \kappa_0(1 + \vartheta t)$$

У претходној једначини , κ_0 је вредност коефицијента топлотне проводљивости на температури 0^0C, док је κ вредност коефицијента на температури t у степенима Целзијуса, а ϑ је коефицијент који може бити и негативан .

Илустрације ради, у таблици су наведене вредности коефицијента топлотне проводљивости неких материјала.

МАТЕРИЈАЛ	ТОПЛОТНА ПРОВОДЉИВОСТ ($Wm^{-1}K^{-1}$)
СРЕБРО	429
БАКАР	401
ЗЛАТО	318
ДИЈАМАНТ	900 -2320
ОЛОВО	35.3
ДРВО	0.04 -0.4

У даљем тексту рећи ћемо нешто више о механизмима преношења топлоте у чврстим телима, конкретније о два механизма -

1) топлотној проводљивости кристалне решетке
2) топлотној проводљивости електрона.

Топлотна проводљивост кристалне решетке доминантан је, ако не и једини вид топлотне проводљивости који се јавља код неметала. Атоми у кристалној решетки су веома чврсто везани хемијским везама, тако да у суштини не осцилује само један или неколико атома , већ читава решетка, услед побуђења.

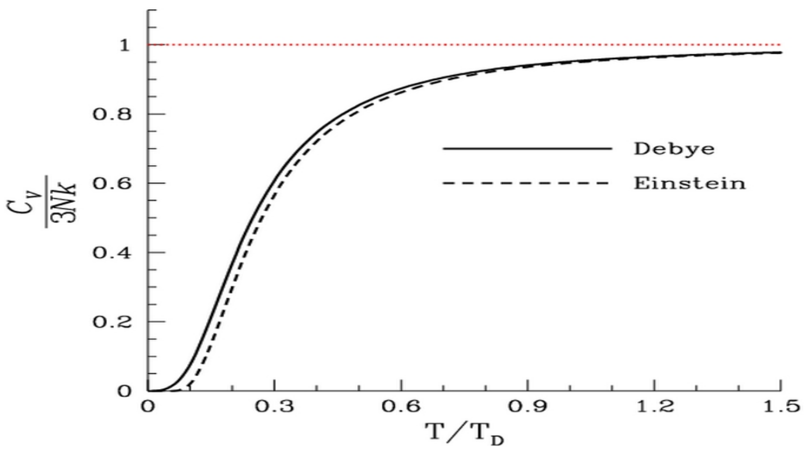
Са друге стране , топлотна проводљивост метала везана је за слободне електроне – који су уједно и носиоци овог процеса. Навешћемо Видеман – Францов закон који говори о директној повезаности (штавише, директној пропорционалности) топлотне проводљивости метала и његове специфичне електричне проводљивости . То је и разумљиво када се зна да су и носиоци процеса електричне проводљивости управо – слободни електрони.

ОСЦИЛАЦИЈЕ КРИСТАЛНЕ РЕШЕТКЕ И ФОНОНИ

На који начин извести једначину стања кристалне решетке? Одговор на ово питање био је веома значајан за даљи развој физике кондензоване материје јер би таква једначина без сумње одгонетнула и питања топлотне и електричне проводљивости кристалне решетке. Такође, сложено питање топлотног капацитета материјала изискивало је испитивање спектра вибрација идеалне монокристалне решетке.

Ајнштајн је , у циљу постављања једначине стања кристалне решетке, пошао од претпоставке да у кристалној решетки свака честица осцилује независно са фреквенцијом ν . Даље је проблем поједноставио сматрајући да су осцилације хармонијске, енергије $nh\nu$ где је n - цео број. Дебај је , са друге стране, сматрао да се решетка не може свести на мноштво независних хармонијских осцилатора, него да су осцилације суседних честица узајамно условљене. Сликовито представљено, еластичне осцилације једнодимензионалне "решетке" (тј . низа) можемо поредити са посебним фреквенцијама вибрације затегнуте жице . Као што је познато побуђиваће се оне осцилације чија се половина таласне дужине садржи цео број пута у дужини жице . Најнижа фреквенција којом жица може да осцилује назива се основна фреквенција, а остале фреквенције зовемо сопствене фреквенције или хармоници. У општем случају , жица осцилује истовремено на више фреквенција, а звук који емитује сложен је од више хармоника – у Дебајевој теорији, осциловање кристалне решетке може се свести на "хармонике", односно основне модове, уз помоћ Фуријеове анализе.

На ниским температурама, Дебајев модел предвиђа пропорционалност топлотног капацитета и T^3, па се некада назива и Дебајев T^3- закон. Добро је описана и зависност на високим температурама, тзв. Дебај – Петијев закон. Извесна експериментална неслагања дешавају се на умерено високим температурама. На слици 2 приказане су криве зависности топлотног капацитета од температуре (тачније односа температуре и тзв. Дебајеве температуре) које следе из Ајнштајнове , односно Дебајеве теорије.



слика 2 – крива зависности топлотног капацитета од температуре .

Осциловање кристалне решетке сведено је на сложено осциловање "хармоника" из нашег поређења , односно нормалних модова. И тако долазимо до новог појма.

Фонон је квазичестица коју карактеришу тзв. модови , квантоване вредности вибрације решетке периодичне, кристалне структуре. Фонони су значајни у физици чврстог стања, јер играју важну улогу у топлотној, али и електричној проводљивости материјала. Реч је , дакле, о манифестацији колективног кретања молекула кристалне решетке . Реч фонон долази од грчке речи "фон", с обзиром да ове квазичестице имају карактеристике звука . Фононе је у физику увео руски физичар Игор Там.

Фонони ниских фреквенција су звучни таласи.

Посматрајмо монокристал чије су све равни идентичне . Сила која делује на раван *s* пропорционална је разлици помераја равни *s* и равни *s*+*p* и има облик Хуковог закона.

$$F_s = \sum_p C_p (u_{s+p} - u_s)$$

У овој једначини, C_p је реституциони коефицијент који се јавља између две равни (различит за лонгитудиналне и трансверзалне таласе) . Међутим C_p и F_s , можемо посматрати као величине везане за један атом у равни . Уколико је његова маса *M* , изводимо једначину кретања :

$$M \frac{d^2 u_s}{dt^2} = \sum_p C_p (u_{s+p} - u_s)$$

Приликом сумирања, *p* узима вредности свих целих бројева јер решетку посматрамо као идеално периодично пространство.

Показује се да је решење ове диференцијалне једначине облика :

$$u_{s+p} = u(0)e^{i(s+p)Ka - i\omega t}$$

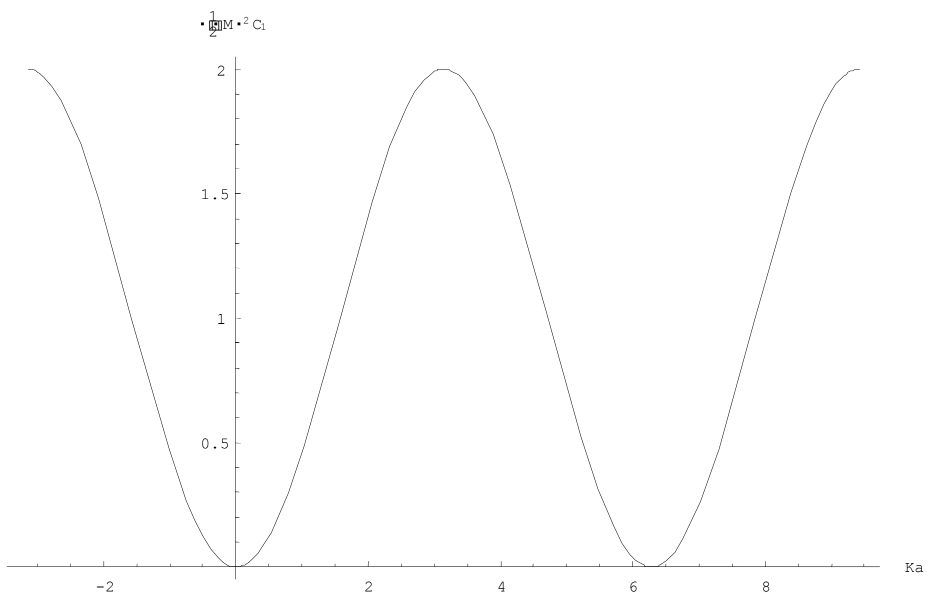
Где је a – константа решетке, а K – таласни вектор. Уврштењем у једначину добијамо следећи израз :

$$\omega^2 M = -\sum_p C_p(e^{ipKa} - 1)$$

Овај израз можемо поједноставити ; прво , с обзиром да смо претпоставили да је реч о моноатомној кристалној решетки, на основу транслационе симетрије, следи да је $C_p = C_{-p}$, потом применом Ојлерове формуле којом e^{ipKa} сводимо на тригонометријски облик комплексног броја и , најзад, занемарујући интеракције између несуседних равни, имамо релацију :

$$\omega^2 = \left(\frac{2C_1}{M}\right)(1 - cosKa)$$

Величина ω има димензију фреквенције и назива се сопствена фреквенција осциловања решетке. Зависност је приказана на слици 3.



слика 3 – зависност ω^2 од K

Добра процена за ред величине једног кванта енергије осциловања кристалне решетке на температури T је kT .

Треба истаћи да је за осциловање кристалне решетке довољно посматрати интервал

$$-\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a}$$

Који је познат као прва Брилуенова зона једнодимензионе решетке. Вредности изван ње можемо репродуковати познавањем зависности унутар зоне.

Уколико оперишемо са двоатомним или вишеатомним мотивом по примитивној ћелији, вибрациони спектар показује нове одлике. Тада се јављају две дисперзионе релације које одређују две гране , познате као акустичке и оптичке гране са истоименим фононима.

Кристал са *N* елементарних ћелија у којима се налази по *s* атома има 3 *Ns* карактеристичних фреквенција, односно нормалних модова. Толиким бројем независних осцилатора можемо представити осцилацију решетке.

У кинетичкој теорији гасова, једноставно се изводи формула за коефицијент термалне проводљивости κ .

$$\kappa = \frac{1}{3}\frac{C_V}{V}\ v_{sr} l$$

При чему је C_V запремински топлотни капацитет, l средња дужина слободног пута,док је v_{sr} брзина звука. У случају чврстих тела, l ће представљати средње растојање које фонон прође без расејања. На слици 2 видели смо график зависности C_V од *T* , на основу теорија Ајнштајна, односно Дебаја. Што се тиче l - а , треба одгонетнути шта смета пролазу фонона у кристалу.

Ако кретање фонона и електрона посматрамо као простирање де Брољевог таласа, онда се проблем одређивања l -а састоји у одређивању пута који тај талас пређе без расејања. Јасно, уколико није нарушена периодичност решетке, расејања нема. Међутим, "препреку" таласу представљају осцилације честица решетке око равнотежног положаја (електрон – фонон, односно фонон-фонон интеракција), али и дефеката који се јављају у кристалу. Матиесеново правило даје нам везу између ових расејања и дужине слободног пута :

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{defekt}} + \frac{1}{l_{granica}} + \frac{1}{l_{fonon-fonon}}$$

Најзад, треба рећи да се, иако слични процеси, топлотна и електрична проводљивост морају одвојено разматрати . Један од упечатљивих примера можемо прочитати из табеле - дијамант , дијалектрик који боље проводи топлоту од одличног електричног проводника , сребра.

ТОПЛОТНА ПРОВОДЉИВОСТ МЕТАЛА

Метали представљају групу материјала који су иницирали индустријски развој у току протекла два века. Значај њиховог проучавања данас се и не доводи у питање. Метали су од изузетне важности не само због њихове добре електричне проводљивости, него и због добре топлотне проводљивости.

Физичка величина која карактерише провођење топлоте је, као што је речено, коефицијент топлотне проводљивости *к.* Упознавање са природом топлотне проводљивости у металима и могућност предвиђања како ће одређени метал понашати као проводник топлоте значајни су са технолошког и научног становишта.

Метали су чврстог агрегатног стања и поседују кристалну структуру тако да, као и сви кристали , поседују компоненту топлотне проводљивости повезану са осцилацијама кристалне решетке , тзв. топлотну проводљивост решетке или фононску проводљивост, κ_p . Међутим, метали поседују и слободне носиоце наелектрисања – слободне електроне који такође учествују у топлотној проводљивости. Штавише, у металима високе проводљивости, као што су бакар , злато, сребро и сл. фононска топлотна проводљивост је занемарљива у односу на допринос слободних електрона.

Сматрамо да се, приликом процеса топлотне проводљивости у металима, фононска проводљивост и проводљивост која долази услед вишка слободних наелектрисања независни процеси. Стога можемо рећи да се топлотна проводљивост метала састоји од два независна сабирка – коефицијента .

$$\kappa = \kappa_p + \kappa_e \ .$$

Проблем израчунавања κ_e лежи у огромном броју слободног електрона у систему - више од 10^{23} електрона по кубном центиметру метала. У циљу поједностављења рачунице, уводи се појам електронског гаса , односно идеалног гаса који се састоји од неитерагујућих електрона који се покоравају законима квантне механике. У првој верзији модела (Друдеов модел електронског гаса) претпостављало се да се све честице тј. електрони крећу једнаком брзином, средњом брзином хаотичног кретања. Модел је касније допуњен Лоренцовом претпоставком да постоји Максвелова расподела електрона по брзинама (каква је у кинетичкој теорији гасова) . Модификацијом израза топлотне проводљивости који следи на основу кинетичке теорије

$$\kappa = \frac{1}{3}\frac{C_V}{V} < v > l$$

Добија се :

$$\kappa_e = \frac{1}{2} n\ l_s v_{ts} k$$

У овој једначини , n је концентрација проводних електрона, l_s средња дужина слободног пута, а v_{ts} је средња брзина топлотног кретања електрона. У Друдеовом моделу електронског гаса изводи се и израз за специфичну електричну проводљивост :

$$\sigma = \frac{e^2 n\ l_s}{m\ \ v_{ts}}$$

Добијамо следеће :

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = \frac{3\ k^2}{2e^2} T = L_0 T$$

Где је L_0 Лоренцов број који износи $1.11\ 10^8\ W\Omega K^{-2}$. Последња једначина представља математички облик Видеман – Францовог закона. Емпиријски су га открили Видеман и Франц 1853. године (тачније, они су установили да је однос κ_e / σ приближно исти за различите метале на истој температури . Пропорционалност овог количника од температуре открио је Лоренц 1872. године.), дакле готово пола века пре открића електрона !

Друдеов модел, , као и класична теорија уопште , имају озбиљних недостатака. При загревању се побуђује веома мали број слободних електрона, јер је квант осциловања кристалне решетке реда величине *kT,* знатно мањи од највишег попуњеног – Фермијевог нивоа (E_F), а једини нивои који се могу ексцитовати су они у околини Фермијевог нивоа . Може се показати да је концентрација побуђених електрона приближно једнака :

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{kT}{E_F}$$

Дакле, веома мала. Класична теорија, па самим тим и Друдеов модел електронског гаса, полазе од тога да се сви слободни електрони побуђују. Ферми – Диракова расподела решава овај проблем.

Уколико се одбаци Друдеов модел електронског гаса и Максвел – Болцманова статистика, те пође од Ферми – Диракове статистике, добија се аналоган израз са тачнијом вредношћу Лоренцовог броја. Наиме

$$L_0 = \frac{\pi^2}{3}(\frac{k}{e})^2 = 2.44\ 10^8\ W\Omega K^{-2}$$

.

Сагласност са експерименталним вредностима на основу овог закона запажа се тек на релативно високим или пак релативно ниским температурама.

ЗАКЉУЧАК

У овом невеликом раду изложени су механизми топлотне проводљивости чврстих тела. У случају кристалне структуре диелектрика реч је о процесима који су тек са појавом квантне механике објашњени ; значај Ајнштајна , Дебаја и многих других који су , руководећи се новим идејама, покушали да објасне механизме осциловања кристалне решетке, не сме се занемарити. Са друге стране, проблем топлотне проводљивости метала био је изузетно сложен јер, док је електрична проводљивост метала могуће објаснити на нивоу кинетичке теорије, примењујући Максвел-Болцманову расподелу на електронски гас, резултати теоријске и експерименталне зависности топлотне проводљивости метала драстично су се разликовали. Применом Ферми-Диракове статистике и овај проблем је успешно решен.

Познавање топлотне проводљивости материјала, као и зависности овог параметра од промене температуре , притиска околине и сл. веома је значајно за технологију обраде материјала , за науку у целини, а само упознавање са механизмима топлотне проводљивости показује интердисциплинарност и кооперативност различитих грана физике чврстог стања.

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлана Лукић, Драгослав Петровић, "Експериментална физика кондензоване материје", Нови Сад, 2000.

2. Чарлс Кител, "Увод у физику чврстог стања", Београд, 1970.

3. Terry M. Tritt , "Thermal Conductivity – Theory, Properties and Applications", Plenum Publishers, New York, London, Dordrecht, London, Moscow.

4. Д. Ивановић, М. Вучић, "Физика 1", Београд, 1952.

5. Милан Распоповић, Дарко Капор, Марио Шкрињар, "Физика 4", Београд, 2004.

6. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/Hbase/thermo/thercond.html

САДРЖАЈ